Seminario Universitario de Ingreso 2026

MÓDULO I

Espacio curricular: Matemática

UTN - FRLP

PAICAT "Programa de Acompañamiento a Ingresantes de Carreras Tecnológicas".

"Sin ingeniería no hay desarrollo, y sin desarrollo no hay nación."

(frase inspirada en obras del Ing. Huergo)

¡Te damos la bienvenida a la UTN, Facultad Regional La Plata!

Es una enorme alegría recibirte en este nuevo camino que iniciás.
El Seminario Universitario de Ingreso es el primer paso en tu recorrido dentro de la Universidad, y en esta Facultad Regional queremos acompañarte para que sea una experiencia enriquecedora, de aprendizaje y también de encuentro con nuevas personas,
saberes y proyectos.
Sabemos que comenzar la vida universitaria implica desafíos, cambios y preguntas. Pero también es una experiencia positiva para seguir creciendo. Por eso, vas a encontrar en cada docente, ayudante y persona de la Facultad un apoyo dispuesto a orientarte y escucharte. No dudes en acercarte, compartir inquietudes y construir con nosotros este tramo que te prepara para la carrera que elegiste.
Creemos que estudiar en la UTN significa mucho más que obtener un título, es formarse como profesionales comprometidos, críticos y con vocación transformadora en el ámbito de la ingeniería. Y este seminario es la puerta de entrada a esa construcción.
¡Te deseamos un gran inicio, con confianza, entusiasmo y energía! Nos alegra que hayas elegido ser parte de esta comunidad tecnológica, que tanto nos enorgullece.

¡A disfrutar esta nueva etapa de aprendizaje!

Equipo de Ingreso
Subsecretaría de Ingreso
Secretaría Académica – UTN FRLP

"Sin ingeniería no hay desarrollo, y sin desarrollo no hay nación."

(frase inspirada en obras del Ing. Huergo)

Sobre el Ingreso

El Seminario Universitario de Ingreso es considerado, para esta Universidad, un tramo formativo especial, donde no sólo se abordan saberes disciplinares, sino que se construyen trayectorias universitarias. Es una instancia que se consolida como el inicio de un proyecto que eligen quienes deciden estudiar en nuestra Facultad.

La Facultad Regional La Plata, conforma uno de los centros formativos de la Universidad Tecnológica Nacional. Tenemos más de 30 sedes distribuidas en todo el territorio argentino, siendo una de las pocas Universidades con tanta representatividad y expansión territorial, convirtiéndonos en una universidad federal.

Nuestra propuesta de formación en el tramo del ingreso, brinda herramientas y fortalece el perfil del estudiante universitario desde el espacio de estrategias para el aprendizaje autónomo.

Equipo de Ingreso
Subsecretaría de Ingreso
Secretaría Académica – UTN FRLP

MÓDULO I: MATEMÁTICAS

Operaciones con números reales. Ecuaciones e inecuaciones. Expresiones algebraicas. Trigonometría. Funciones Trigonométricas. Expresiones analíticas y representación gráfica. Resolución de triángulos. Función lineal. Expresiones analíticas y representación gráfica. Función cuadrática. Expresiones analíticas y representación gráfica. Aplicaciones a través de la modelización y resolución de situaciones problemáticas.

Objetivos de logro para el Módulo Matemática

- Objetivo 1: Identificar propiedades de los números reales, la trigonometría y las funciones lineales y cuadráticas desarrollando un pensamiento lógico y reflexionando de forma participativa.
- Objetivo 2: Interpretar enunciados y problemas de la vida cotidiana para su resolución matemática, poniendo en contexto las definiciones y propiedades de las herramientas estudiadas.
- Objetivo 3: Utilizar los conceptos y herramientas matemáticas estudiados para resolver situaciones problemáticas que se relacionan con su formación académica.

Teoría de Conjuntos

Introducción

La teoría de conjuntos es uno de los pilares fundamentales de la matemática moderna. A través de ella, podemos organizar, clasificar y relacionar distintos objetos —números, letras, figuras, ideas— de manera precisa. Aunque su estudio formal es relativamente reciente en la historia de la matemática, sus ideas están presentes en casi todas las áreas de la disciplina: desde el álgebra y la geometría hasta el cálculo y la lógica.

En esta sección abordaremos los conceptos básicos que permiten describir y operar con conjuntos. Aprenderemos a reconocer conjuntos, a describirlos de diferentes formas, y a trabajar con sus elementos. También exploraremos operaciones como la unión, la intersección y la diferencia entre conjuntos, así como representaciones visuales que nos ayudarán a comprender mejor sus relaciones.

Dominar estos conceptos no solo es útil para resolver problemas matemáticos: también nos brinda herramientas para pensar con claridad y construir razonamientos lógicos sólidos, habilidades esenciales para cualquier disciplina universitaria.

¿Qué es un conjunto?

Un conjunto es una **colección de objetos bien definidos**, llamados **elementos**, que **comparten alguna característica común**. Podemos pensar en un conjunto como una “bolsa” que contiene ciertos objetos, y **el criterio para decidir qué se incluye debe ser claro y preciso**.

En la vida cotidiana trabajamos agrupamos elementos constantemente en base a sus características. Si mencionamos *frutas*, seguro podamos nombrar más de un tipo de ellas.

“Frutas” es un conjunto compuesto por los elementos: manzana, banana, pera, mandarina... entre otros.

En este ejemplo podemos identificar un grupo de elementos categorizados con un criterio específico. Además, podemos destacar otras características importantes:

- **El orden de los elementos no importa** (si en la lista de compras escribimos “manzana, naranja y pera”, es lo mismo que escribir “pera, manzana y naranja”, terminamos comprando lo mismo).
- **Los elementos no se repiten.** En un conjunto, lo que importa es qué elementos hay, no cuántas veces aparecen. Por ejemplo, si compramos 3

manzanas, no decimos “compré manzana, manzana y manzana”, sino simplemente “compré manzanas”, porque todas son del mismo tipo. De la misma manera, en un conjunto escribimos cada elemento una sola vez, aunque se repita en la realidad.

Además, un conjunto puede **contener a otros conjuntos**. En ese caso, el conjunto exterior será el más general, mientras que los conjuntos internos serán **subconjuntos** más específicos. Por ejemplo, dentro del conjunto de frutas, podemos agrupar todas las frutas rojas (como la manzana roja, la frutilla y la cereza). Ese nuevo grupo es un subconjunto del conjunto de frutas.

También existen dos conjuntos especiales que vale la pena conocer:

- **El conjunto universal (U)**, que es el conjunto que contiene **todos los elementos posibles en un determinado contexto**. Por ejemplo, si estamos trabajando con alimentos, el conjunto universal podría ser “todos los alimentos disponibles”.
- El **conjunto vacío (∅)**, que es el conjunto que **no contiene ningún elemento**. Por ejemplo, si buscamos frutas cuadradas, podríamos decir que el conjunto de “frutas cuadradas” está vacío, ya que no conocemos ninguna fruta con esa forma.

Formas de representar conjuntos

Una vez que entendemos qué es un conjunto, necesitamos una forma de representarlo de manera ordenada y precisa. Para eso, la matemática utiliza dos formas principales de escribir conjuntos: por **extensión** y por **comprensión**.

Ambas tienen el mismo objetivo: describir qué elementos pertenecen a un conjunto, pero lo hacen de modos diferentes. En algunos casos es más conveniente listar todos los elementos; en otros, es mejor describir una regla general que los define.

Definición por extensión

Los conjuntos definidos por extensión **listan todos los elementos posibles dentro del mismo**. El ejemplo más común es el de los días de la semana:

$$S = \{Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes, Sábado, Domingo\}$$

Siempre que **referenciemos un conjunto,** lo hacemos **con una letra mayúscula**, siempre se intenta que sea descriptiva de lo que intentamos representar, la U se reserva para el conjunto universal y **el símbolo ∅ se utiliza para denotar el conjunto vacío**. **Los elementos al utilizar la notación por extensión van entre llaves y separados por coma**, tal y como se muestra arriba.

Definición por comprensión

Para definir un conjunto **por comprensión** escribimos una **regla que describe a sus elementos**, **sin** necesidad de **enumerarlos uno por uno**. En lugar de listar todos los elementos, se indica la propiedad que deben cumplir para pertenecer al conjunto.

Se escribe entre llaves y suele usarse una notación como:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \; / \; x \; es \; par\}$$

Esto se lee "*A es el conjunto de todos los números naturales tales que x es par*".

Relaciones entre elementos y conjuntos: Pertenencia e Inclusión

Cuando trabajamos con conjuntos, no solo nos interesa qué elementos los componen, sino también cómo se relacionan esos elementos y conjuntos entre sí. Para eso, utilizamos dos conceptos clave: pertenencia e inclusión.

Pertenencia

La pertenencia se refiere a la **relación entre un elemento y un conjunto**. Para indicar que un elemento pertenece a un conjunto, usamos el símbolo ∈.

Por ejemplo:

$3 \in A$ (se lee "*el elemento 3 pertenece al conjunto A*")

Si el elemento no pertenece al conjunto, usamos el símbolo ∉:

$$7 \notin A$$

Este tipo de relación se usa cuando hablamos de valores individuales que están (o no) dentro de una colección.

Inclusión

La inclusión se refiere a la **relación entre conjuntos**. Un conjunto está incluido en otro cuando todos sus elementos también pertenecen al otro conjunto. Se representa con el símbolo ⊆ y se lee "está contenido en" o "es subconjunto de".

Por ejemplo, si:

$B = \{1,2\}$ y $A = \{1,2,3,4\}$

Entonces:

$$B \subseteq A$$

También existe el caso en que un conjunto no está incluido en otro, que se expresa como:

$$B \nsubseteq A$$

Para tener en cuenta:

- Todo conjunto es subconjunto de sí mismo.
- El conjunto vacío está incluido en todos los conjuntos.

Representación gráfica de conjuntos: Diagrama de Venn

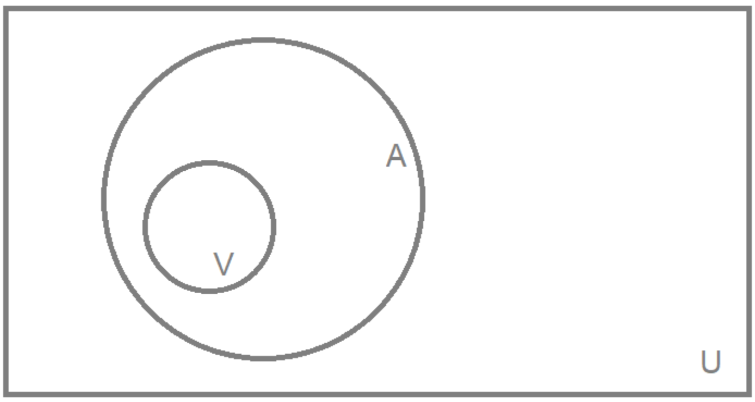
Los diagramas de Venn son una **forma visual y sencilla de representar conjuntos y las relaciones** que existen entre ellos. Se utilizan círculos dentro de **un rectángulo** que **representa el conjunto universal**.

Cada círculo representa un conjunto y su posición en el diagrama permite visualizar si los conjuntos se intersecan, están contenidos uno en otro, o no tienen elementos en común.

Los diagramas de Venn son útiles para:

- Mostrar relaciones entre conjuntos.
- Representar operaciones como unión, intersección, diferencia y complemento.
- Resolver problemas de conteo o lógica.
- Comprender mejor los conceptos de inclusión y pertenencia.

Por ejemplo, pensemos en este manual, este está compuesto por distintos caracteres (números, letras, símbolos). Podríamos representar estos datos en un Diagrama de Venn:



A: conjunto de caracteres pertenecientes al abecedario.

V: conjunto de vocales.

U: todos los caracteres presentes en el documento.

$$V \subset A \subset U.$$

En este ejemplo, V es subconjunto de A, así como A lo es de U. El abecedario (A) comprende las vocales, pero también las consonantes, por eso el conjunto incluye a V. Y el conjunto universal comprende todo el abecedario, pero además contiene otros elementos, como los signos de puntuación, por ejemplo.

Operaciones entre conjuntos

Una vez que conocemos qué es un conjunto y cómo representarlo, es importante aprender cómo relacionarlos entre sí. Las operaciones entre conjuntos nos permiten combinar, comparar o separar conjuntos según sus elementos. Estas operaciones son muy útiles para analizar información, organizar datos y resolver problemas en diversas áreas.

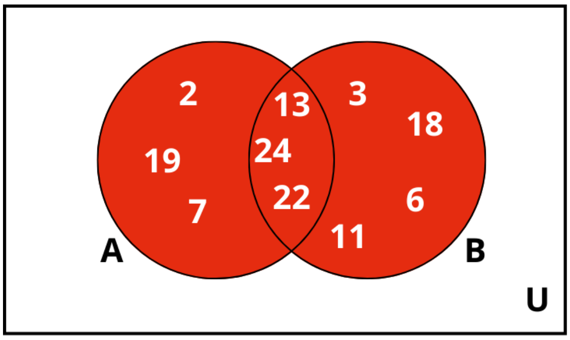
Unión de conjuntos

La unión de dos conjuntos, denotada $A \cup B$, es el conjunto que contiene todos los elementos que están en A, en B, o en ambos.

$A = \{2, 24, 7, 13, 22, 19\}$

$B = \{3,24,6,13,11,22,18\}$

$A \cup B = \{2, 24, 7, 13, 22, 19, 3, 6, 11, 18\}$



IMPORTANTE: Los que están en ambos conjuntos aparecen una sola vez en el conjunto resultante ya que no deben repetirse los elementos, el 24, por ejemplo.

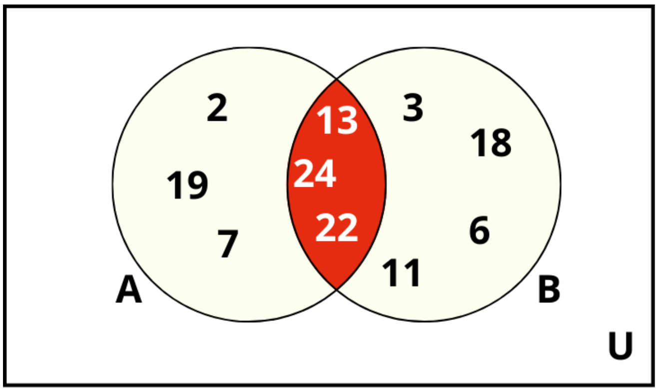
Intersección de conjuntos

La intersección, denotada $A \cap B$, es el conjunto de todos los elementos que están tanto en A como en B.

$A = \{2, 24, 7, 13, 22, 19\}$

$B = \{3, 24, 6, 13, 11, 22, 18\}$

$A \cap B = \{24, 13, 22\}$



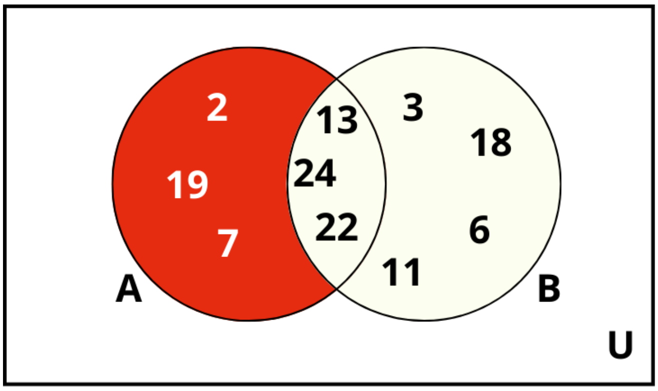
Diferencia de conjuntos

La diferencia, denotada $A - B$, es el conjunto de elementos que están en A pero no en B

$A = \{2, 24, 7, 13, 22, 19\}$

$B = \{3, 24, 6, 13, 11, 22, 18\}$

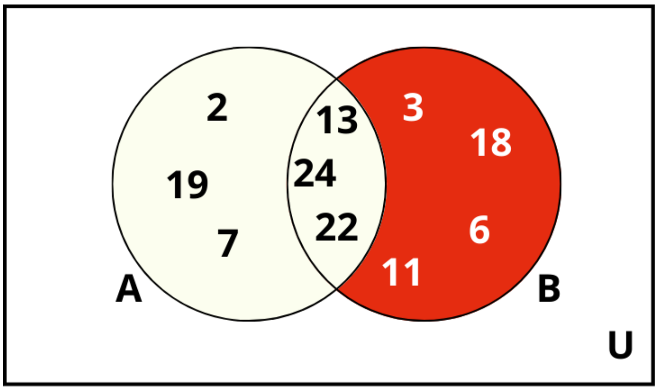
$A - B = \{2, 7, 19\}$



¿Qué pasa si hacemos $B - A$?

Este conjunto queda dado por todos los elementos en B que **NO** se pertenecen a A.

$B - A = \{3, 6, 11, 18\}$



Por lo tanto, esta operación no es conmutativa, **el orden en que coloquemos los conjuntos altera el resultado**.

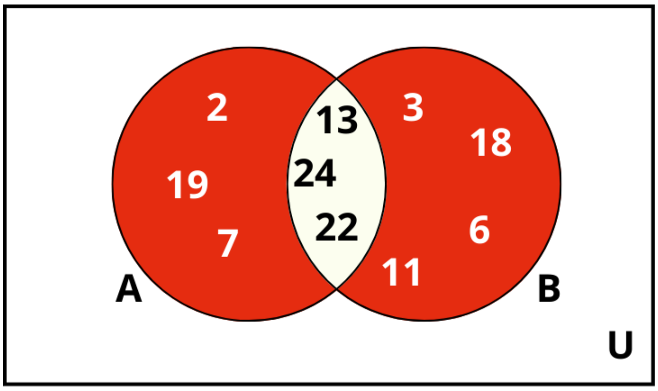
Diferencia Simétrica

La diferencia simétrica, denotada $A\Delta B$, es el conjunto de elementos que están en A o en B, pero no en ambos.

$A = \{2, 24, 7, 13, 22, 19\}$

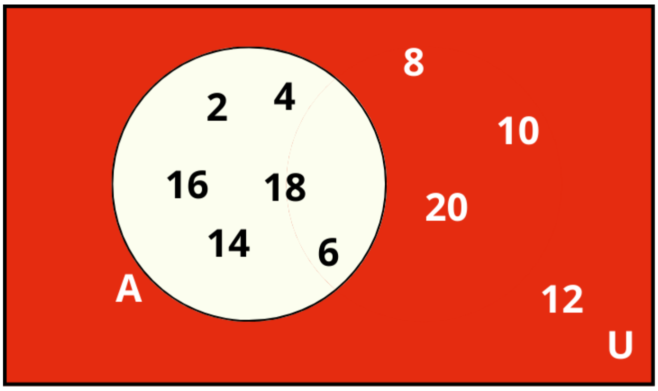
$B = \{3, 24, 6, 13, 11, 22, 18\}$

$A\Delta B = \{2, 7, 19, 3, 6, 11, 18\}$



Complemento

El complemento de un conjunto A, denotado A^C o $\bar{A}$, es el conjunto de todos los elementos del conjunto universal U que no están en A.



$U =$ Todos los números pares menores o iguales a 20.

$A = \{2, 16, 14, 18, 6, 4\}$

$A^C = \{8, 10, 12, 20\}$

Conjuntos Infinitos

En muchas situaciones cotidianas podemos contar la cantidad de elementos de un conjunto, como el de las estaciones del año o los días de la semana. Sin embargo, existen conjuntos cuya **cantidad de elementos no puede determinarse exactamente porque no tiene fin**. A estos conjuntos se los denomina **conjuntos infinitos**. Esto no significa que no podamos hablar de ellos o representarlos, sino que siempre hay más elementos por contar. Dentro de ellos, existen dos tipos:

- Conjuntos Infinitos Numerables: son conjuntos de los cuales podemos hacer una lista de sus elementos, aunque no termine nunca. Es decir, si podemos contarlos "de a uno", en una secuencia. Por ejemplo: Los números naturales $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$

- Conjuntos Infinitos No Numerables: son aquellos de los que no podemos hacer una lista que incluya todos sus elementos, ni siquiera teóricamente. Es decir, hay “demasiados” elementos como para contarlos de a uno. Por ejemplo: El conjunto de los números reales entre 0 y 1.

Conjuntos Numéricos

Los conjuntos numéricos agrupan los distintos tipos de números que usamos según sus características. A medida que avanzamos en la matemática, necesitamos extender el conjunto de números que utilizamos, para poder resolver nuevas situaciones.

Cada conjunto incluye al anterior, como si fuéramos construyendo capas de números:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Donde:

- $\mathbb{N}$: Naturales
- $\mathbb{Z}$: Enteros
- $\mathbb{Q}$: Racionales
- $\mathbb{R}$: Reales

En esta sección vamos a estudiar cómo surgen, cómo se relacionan entre sí y qué propiedades tienen.

Números Naturales ($\mathbb{N}$)

El conjunto de los números naturales, denotado por $\mathbb{N}$, está formado por los números que usamos para contar.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, \infty\}$$

Algunos autores incluyen el 0, otros no. Nosotros lo vamos a trabajar dentro de un nuevo conjunto que es el de los **Naturales Ampliado** que se denota $\mathbb{N}_0$.

Estudiar los naturales nos lleva a conceptos muy importantes como la **divisibilidad**.

Divisibilidad

Un número a es divisible por b (se dice que b divide a a) si existe un número natural k tal que:

$$a = b \cdot k$$

Donde a, b y $k \in \mathbb{N}$. Es decir, si puedo dividir un número a por otro número b, sin que "sobre" nada (sin que quede resto) decimos que b es **divisor** de a. A su vez, se dice que a es un **múltiplo** de b ya que resulta de multiplicar este último por otro número entero.

Existe un número que puede dividir a todos los números y es el 1.

Vayamos a un ejemplo:

Si tuviéramos 8 caramelos, y los queremos dividir entre 3 personas, a cada una le quedan 2 caramelos y sobran otros 2. Por lo tanto, 3 no es divisor de 8 porque no puede dividirlo en partes exactas. Pero si tuviéramos que repartir los caramelos en 4 personas, cada quién tendría 2 nuevamente, pero en esta ocasión no sobraría ninguno. Ahora sí, hallamos un divisor de 8 ya que la división fue exacta.

Ahora, al dividir números naturales, hay algunos casos particulares donde un elemento puede ser divisible solo por otros dos: el uno y por sí mismo. Estos se conocen como **Números Primos**. Por ejemplo: si intentamos dividir el número 13, vemos que cualquier número que seleccionemos no logra dividirlo en partes iguales sin dejar resto, por lo cual, podemos afirmar que es un número primo.

Teorema fundamental de la aritmética

Podrán preguntarse ¿De qué nos sirve conocer los números primos? Bueno, existen ocasiones en las que necesitamos expresar un número en función de sus componentes. El **teorema fundamental de la aritmética** nos dice que todo número natural puede expresarse **de forma única** como **producto de números primos**. Es decir, podemos utilizar los números primos para “crear” todos los demás números naturales existentes.

Por ejemplo:

$$78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$$

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$$

A esta descomposición se la llama factorización prima.

MCD y MCM

A veces, al trabajar con dos o más números, surge la necesidad de compararlos en términos de divisibilidad o múltiplos. Por ejemplo, podríamos querer saber cuál es el número más grande que los divide a todos en partes exactas, o bien cuál es el número más pequeño que se puede obtener multiplicando cada uno por algún número natural. Estas situaciones nos llevan a los conceptos de máximo común divisor (MCD) y mínimo común múltiplo (MCM), dos herramientas fundamentales de las matemáticas.

Máximo Común Divisor (MCD)

El Máximo Común Divisor de dos o más números naturales es el mayor número natural que los divide a todos exactamente, es decir, sin dejar resto.

Cómo se calcula:

1. Se descompone cada número en factores primos. Esto lo logramos dividiendo sucesivamente el número por algún divisor primo.
2. Se identifican los factores comunes.
3. Se toma el producto de los factores comunes elevados al menor exponente con que aparecen.

Ejemplo: Calcular el MCD de 24 y 36.

Para hacerlo iniciamos trazando una línea, colocando el número 24 a izquierda su izquierda.

Cómo siguiente paso, seleccionamos un número primo que sea divisor de 24 y lo escribimos a la derecha de la línea, por ejemplo el 2. $24 \div 2 = 12$, por lo que tomamos el 12 y lo escribimos debajo del 24.

Repetimos el proceso hasta que el resultado de la división nos de 1. $12 \div 2 = 6 \rightarrow 6 \div 2 = 3 \rightarrow 3 \div 3 = 1$. Al terminar el proceso deberíamos tener una tabla como la que vemos a la derecha.

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

Ahora, aplicamos el mismo procedimiento para el 36

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

Finalmente, expresamos ambos en términos de los factores hallados a la derecha de la tabla:

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$$

Cuando tenemos un número repetido varias veces en el producto podemos expresarlo como: 2^3. Donde el pequeño numerito que se escribe arriba se conoce como **exponente** e indica cuantas veces se repite el número en el producto. Más adelante lo retomaremos en profundidad.

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$$

Ahora, como indicamos más arriba, para hallar el MCD, se deben multiplicar los **factores comunes a todos los números tomándolos con su menor exponente**.

Entonces $MCD(24; 36) = 2^2 \cdot 3 = 12$

Mínimo Común Múltiplo (MCM)

El Mínimo Común Múltiplo de dos o más números naturales es el menor número natural que es múltiplo compartido de todos.

Cómo se calcula:

1. Se descompone cada número en factores primos.
2. Se identifican todos los factores presentes.
3. Se toma el producto de todos esos factores elevados al mayor exponente con que aparecen.

Tomemos los números del ejemplo anterior, 24 y 36.

Sabemos que $24 = 2^3 \cdot 3$ y $36 = 2^2 \cdot 3^2$. Entonces, ahora tomamos **todos los factores en su mayor exponente** y los multiplicamos para calcular el MCM.

$$MCM(24, 36) = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$$

Resolvamos otro ejemplo donde los números a calcular tengan factores distintos.

Calcular el MCM y MCD de 126 y 132.

Primero, aplicamos la división por factores primos para obtener los factores de cada número:

$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 132 & 2 \\ 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Ahora expresamos los números a partir de los factores primos obtenidos:

$$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

$$132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$$

Acá es donde los procedimientos cambian. Para calcular el MCM tomamos TODOS los factores que aparezcan en su MAYOR exponente.

$$MCM(126; 132) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 = 2772$$

Para obtener el MCD se hace el producto entre los factores COMUNES en su MENOR exponente.

$$MCD(126; 132) = 2 \cdot 3 = 6$$

Números Enteros ($\mathbb{Z}$)

Los números enteros, representados con la letra $\mathbb{Z}$, amplían el conjunto de los números naturales, incorporando a estos sus opuestos negativos.

Podemos imaginar que los enteros nacen a partir de una necesidad: si solo tuviéramos los números naturales (1, 2, 3, 4, ...), no podríamos representar situaciones como una deuda, una temperatura bajo cero o una pérdida de puntos en un juego. Por eso, los enteros incluyen tanto ganancias como pérdidas, avances como retrocesos. Así, $\mathbb{Z}$ está formado por:

$$\mathbb{Z} = \{-\infty, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \infty\}$$

Regla de los signos

El hecho de incorporar los opuestos negativos de cada número natural, hace que algunas operaciones tengan una complejidad extra. ¿Qué pasa cuando multiplicamos dos números enteros?

Si ambos tienen el mismo signo, es decir, ambos son positivos o ambos negativos, el resultado será positivo. Por otro lado, si los números tienen signos opuestos (uno es negativo y el otro positivo), el resultado será negativo. En resumen:

$$+ \cdot + = +$$

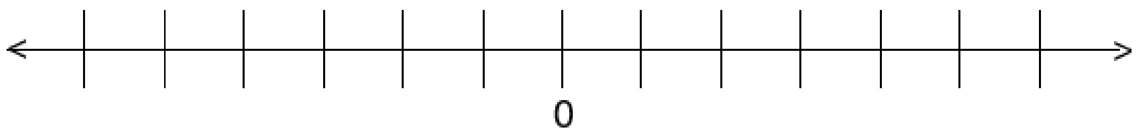
$$+ \cdot - = -$$

$$- \cdot + = -$$

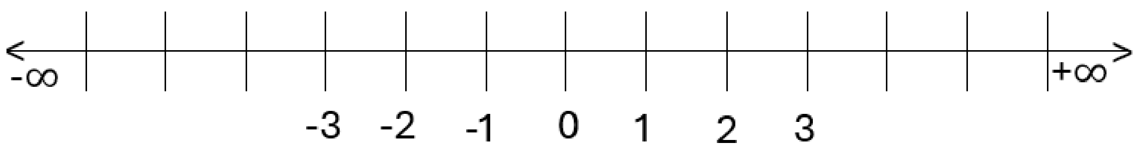
$$- \cdot - = +$$

¿Cuál es mayor?

Incorporando los números negativos ¿Cómo sabemos cuál es mayor? ¿El -7 es mayor que el 1? ¿O el 1 es mayor que el – 7? Para esto, resulta sumamente útil el concepto de la **Recta Numérica**. Esta consiste en trazar una línea horizontal con el 0 como elemento central de la misma.



Ahora, a la derecha colocaremos los números positivos, y a la izquierda los negativos.



Así, mientras más a la izquierda esté el número, menor será y a medida que vayamos avanzando hacia la derecha, mayor será el número. Simbólicamente, podemos expresar si un número es mayor que otro con < (menor que) o > (mayor que).

$-7 < 3$ $\qquad$ $2 > -5$ $\qquad$ $-11 < -1$

Valor absoluto

En ocasiones, podemos preguntarnos qué punto se encuentra más cerca del cero. Es acá donde surge al concepto de ***valor absoluto***, que nos indica a qué distancia se encuentra un punto dado del 0. Este se escribe de la forma $|a|$

Por ejemplo: -3 y 3 están a la misma distancia del 0, es decir, a 3 unidades. Entonces, $|-3| = |3| = 3$.

Números Racionales $\mathbb{Q}$

Los números racionales, representados por la letra $\mathbb{Q}$, son aquellos que pueden escribirse como el cociente entre dos números enteros, donde el denominador no es cero. Este conjunto incluye a todos los números que se pueden expresar como fracciones, tanto positivas como negativas, e incluso a los números decimales exactos o periódicos.

¿Qué es una fracción?

Una fracción es una forma de representar una parte de un todo. Se escribe como el cociente de dos números:

$$\frac{a}{b}$$

Donde:

- a se lo conoce como **numerador**. Indica cuantas partes del total tomamos
- b es el **denominador**. Indica en cuantas partes dividimos el total.

Por ejemplo, si cortamos una pizza en 8 partes, cada porción representa $\frac{1}{8}$ de la pizza. Si comemos 3 porciones, comimos $\frac{3}{8}$ de la pizza.

Razón Geométrica

Una razón geométrica es una relación entre dos cantidades que se expresa como una fracción o cociente. Si bien se escriben como fracción, su significado cambia.

Ejemplo:

En la facultad de medicina, hay 3 estudiantes de nutrición por cada 10 estudiantes de medicina. La razón queda expresada como $\frac{3}{10}$. Entonces, si hay 30 estudiantes de medicina en total, podemos afirmar que hay 9 estudiantes de nutrición.

Enteros vs Fraccionarios

Los números enteros son aquellos que no tienen parte decimal ni fraccionaria. Vimos anteriormente que incluyen los números positivos, los negativos y al cero. Este tipo de números pueden verse expresarse como fracciones con denominador 1. Ejemplo

$$5 = \frac{5}{1} \qquad 3 = -3/1 \qquad 17 = \frac{17}{1}$$

Al dividir un número por si mismo, siempre da uno:A su vez, si intentamos dividir un número entero por uno de sus divisores, resultará en otro número entero.

$$-\frac{16}{4} = -4 \qquad -\frac{12}{6} = -2 \qquad \frac{27}{9} = 3$$

Pero ¿Qué pasa si intentamos dividir un número por algún otro entero que no sea divisor del mismo?

$$\frac{7}{2}$$

En este caso, no podemos dar una división exacta que resulte en un entero. Es aquí donde surgen los **números fraccionarios**.

Los números fraccionarios son aquellos que representan una parte de un entero y se expresan en forma de fracción. Por ejemplo, cuando hablamos de “la mitad de algo” lo podemos expresar cómo

$$\frac{1}{2}$$

O cuando vamos a la panadería y pedimos “un cuarto de kilo de pan” estamos pidiendo $\frac{1}{4}$ de kilo pan.

Estos números permiten expresar cantidades más precisas que los enteros, especialmente cuando trabajamos con divisiones no exactas.

Formas de expresar fracciones

Los números fraccionarios pueden representarse de diferentes maneras, y es importante reconocerlas para poder interpretarlos y operar correctamente con ellos. A continuación, detallamos las formas más comunes:

Fracciones Propias

Una fracción propia es aquella en la que el numerador es menor que el denominador. Representa una cantidad menor que la unidad.

$$\frac{2}{3} \qquad \frac{5}{8} \qquad \frac{1}{4}$$

Fracción Impropia

Una fracción impropia es aquella en la que el numerador es igual o mayor que el denominador. Representa una cantidad mayor o igual que la unidad.

$$\frac{4}{4} \qquad \frac{7}{5} \qquad \frac{9}{3}$$

Número Mixto

Un número mixto combina una parte entera con una fracción propia. Se utiliza para expresar fracciones impropias de manera más intuitiva.

$$\frac{7}{4} = 1\ \frac{3}{4}$$

Este número se lee como 1 entero y 3 cuartos.

Ahora que ya conocemos las fracciones, veamos cómo operarlas.

Suma y resta de fracciones

Para sumar o restar fracciones, es necesario que tengan el mismo denominador. Si lo tienen, simplemente se suman o restan los numeradores y se mantiene el denominador.

Ejemplo:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2+1}{5} = \frac{3}{5}$$

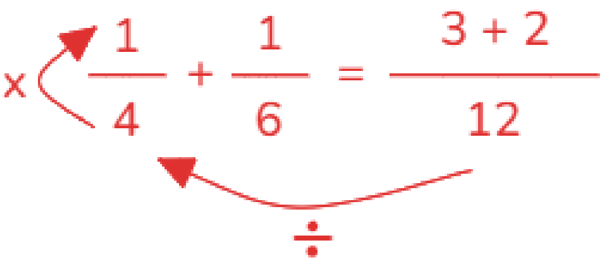
Si los denominadores son distintos, primero se deben convertir a fracciones equivalentes con denominador común (generalmente el mínimo común múltiplo de los denominadores), y luego se procede como en el caso anterior.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = ?$$

Para resolverlo, primero debemos obtener el $MCM(4;6)$ que es 12. Luego, lo colocamos cómo denominador del resultado:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{?}{12}$$

Pero ¿Qué va en el numerador? Para calcularlo, tomo el nuevo denominador, lo divido por el denominador original y lo multiplico por el numerador, y esto lo hago por cada una de las fracciones que estoy sumando:



$$\frac{12}{4} = 3 \rightarrow 3 \cdot 1 = 3$$

$$\frac{12}{6} = 2 \rightarrow 2 \cdot 1 = 2$$

Entonces, la suma final queda:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{3+2}{12} = \frac{5}{12}$$

Multiplicación de fracciones

Para multiplicar fracciones, el procedimiento es más directo. Se debe multiplicar los numeradores entre sí, lo mismo para los denominadores.

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$$

División de fracciones

Al tener una fracción dividida por otra, lo que se debe hacer es “dar vuelta” la segunda fracción (invertir numerador y denominador) y luego resolverlo como multiplicación de fracciones.

$$\frac{5}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{6}$$

Fracciones equivalentes

Dos fracciones son equivalentes si representan la misma cantidad, aunque estén escritas con distintos números. Ejemplo

$$\frac{5}{2} = \frac{10}{4} = \frac{15}{6}$$

Si resolvemos estas divisiones con la calculadora, vemos que todas valen lo mismo: 2,5. Esto es sumamente útil a la hora de operar fracciones ya que podemos ***simplificarlas*** o ***amplificarlas*** haciendo más simple el cálculo.

Simplificar una fracción consiste en encontrar otra equivalente que utilice números más pequeños, dividiendo numerador y denominador por un mismo número. Por ejemplo, $\frac{4}{6}$ se puede simplificar dividiendo ambos términos por 2, obteniendo

$$\frac{4 \div 2}{6 \div 2} = \frac{2}{3}$$

Esto nos dice que

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Amplificar, en cambio, implica multiplicar numerador y denominador por el mismo número para obtener una fracción con mayor denominador, pero que siga representando la misma cantidad. Por ejemplo, $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, ya que multiplicamos numerador y denominador por 3.

$$\frac{6}{9} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3}$$

Reconocer fracciones equivalentes nos permite operar con mayor facilidad, especialmente al sumar, restar o comparar fraccionarios.

Fracciones a Decimales

Una fracción puede expresarse como número decimal dividiendo su numerador por su denominador. Esto permite comparar cantidades de forma más directa o trabajar con cálculos que requieren decimales.

Dentro de los racionales existen tres tipos de decimales:

- Decimal exacto o finito: la cantidad de números después de la coma es acotada.

  $\frac{5}{2} = 2{,}5$ $\qquad$ $\frac{13}{4} = 3{,}25$ $\qquad$ $\frac{26}{16} = 1{,}625$

- Decimal periódico puro: los números después de la coma se repiten infinitamente en un patrón.

$$6{,}29292929292929\ldots$$

$$8{,}36363636363636\ldots$$

- Decimal periódico mixto: su parte decimal tiene una parte que no se repite y una que sí.

$$2{,}1374444444444\ldots$$

Cuando se obtiene un decimal periódico, se puede representar colocando una barra sobre la parte que se repite. Por ejemplo, podríamos expresar los tres números de arriba como:

$$6,\overline{29} \qquad 8,\overline{36} \qquad 2{,}137\overline{4}$$

Pasar una fracción a decimal también es útil para representar resultados aproximados en contextos prácticos, como mediciones, dinero o porcentajes.

Decimales a fracciones

Así como podemos expresar las fracciones en decimales, también podemos expresar decimales en forma de fracciones. Para esto, se aplican distintos procedimientos dependiendo del tipo de decimal que queramos convertir.

Decimal finito a fracción

Convertir el decimal 0,75 a fracción.

- Paso 1: escribir el número sin la coma.

$$75$$

- Paso 2: como denominador agregar un 1 y tantos 0 como dígitos haya después de la coma.

$$\frac{75}{100}$$

- Paso 3 (opcional): como paso adicional, podemos simplificar la expresión para que quede denotada en términos más sencillos.

$$\frac{75 \div 25}{100 \div 25} = \frac{3}{4}$$

Decimal periódico puro a fracción:

Convertir el decimal $7,\overline{28}$ a fracción

- Paso 1: escribir el número sin la coma (los dígitos que se repiten se escriben una sola vez). Al número obtenido restarle la parte que no se repite.

$$728 - 7 = 721$$

- Paso 2: una vez hecha la resta, en el denominador colocar tantos 9 cómo dígitos periódicos haya (en este caso dos, el 2 y el 8).

$$\frac{721}{99}$$

- Paso 3 (opcional): simplificar la expresión. En este caso no se puede ya que el 721 y el 99 no comparten ningún MCD aparte del 1.

Decimal periódico mixto a fracción:

Convertir el decimal $1{,}72\overline{34}$ a fracción.

- Paso 1: escribir el número sin la coma (los dígitos que se repiten se escriben una sola vez). Al número obtenido restarle la parte que no se repite.

$$17234 - 172 = 17062$$

- Paso 2: en el denominador, colocar tantos 9 como dígitos periódicos haya (en este caso dos: 3 y 4) y tantos 0 como dígitos sin repetición después de la coma (en este caso dos: 7 y 2)

$$\frac{17062}{9900}$$

- Paso 3 (opcional): simplificar la expresión:

$$\frac{8531}{4950}$$

¿Qué pasaría si los dígitos decimales son infinitos y no se repiten en un patrón? En este caso, ya no estaríamos hablando de números racionales, sino que iríamos más allá, a los ***números irracionales***.

Números Irracionales

Los números irracionales son aquellos que no pueden expresarse como una fracción exacta entre dos números enteros. Es decir, no existe una pareja de números a y b tal que $\frac{a}{b}$ represente al número.

Su expresión decimal no termina nunca (es infinita) y no tiene un patrón repetitivo. A diferencia de los decimales periódicos, que se repiten, los irracionales tienen cifras decimales que parecen aleatorias y no se repiten jamás de manera cíclica.

Ejemplos comunes de números irracionales:

π (pi): representa la relación entre la circunferencia y el diámetro de un círculo. Aproximadamente: 3,14159265...

$\sqrt{2}$: es la raíz cuadrada de 2. No puede escribirse como fracción exacta. Aproximadamente: 1,4142...

e: la base de los logaritmos naturales. Muy importante en matemáticas avanzadas. Aproximadamente: 2,7182...

Números Reales $\mathbb{R}$

El conjunto de números reales incluye todos los números que se pueden representar en la recta numérica. Es decir, combina tanto a los números racionales (como fracciones y decimales finitos o periódicos) como a los irracionales. Entonces, decimos que este conjunto contiene a todos los demás vistos hasta el momento.

Los números reales cumplen con un conjunto de propiedades fundamentales que permiten operar con ellos de forma coherente. Estas propiedades son la base de muchas reglas del álgebra y el análisis matemático.

Propiedades de los números reales

Propiedad conmutativa

El orden de los factores no altera el resultado.

Suma:

$$a + b = b + a$$

Por ejemplo

$$5 + 2 = 2 + 5$$

$$7 - 3 = -3 + 7$$

(*Resulta importante resaltar que una resta no es más que la suma de un número positivo y uno negativo* $7 + (-3) = 4$)

Multiplicación:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$$

Propiedad asociativa

El modo en que se agrupan los términos no cambia el resultado.

Suma:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4) = 9$$

Multiplicación:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$(2 \cdot 3) \cdot 5 = 2 \cdot (3 \cdot 5) = 30$$

Propiedad distributiva

Multiplicar un número por una suma es igual a multiplicarlo por cada sumando y luego sumar.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$5 \cdot (4 + 3) = 5 \cdot 4 + 5 \cdot 3$$

Resolvamos ambos lados del igual para ver si es cierto:

$$5 \cdot (7) = 20 + 15$$

$$35 = 35$$

Elemento neutro

Hay un número que, al operar con otro, no cambia su valor.

Suma:

$$a + 0 = a$$

$$7 + 0 = 7 \qquad 312 + 0 = 312 \qquad 412934 + 0 = 412934$$

Multiplicación:

$$a \cdot 1 = a$$

$$9 \cdot 1 = 9 \qquad 431 \cdot 1 = 431 \qquad 1682 \cdot 1 = 1682$$

Elemento opuesto e inverso

Todo número real tiene un opuesto para la suma y un recíproco para la multiplicación (excepto el 0).

Opuesto (aditivo):

$$a + (-a) = 0$$

Inverso (multiplicativo):

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \quad con\ a \neq 0$$

Operaciones aritméticas

Las operaciones aritméticas son las acciones básicas que podemos realizar con números. Estas operaciones forman la base de la matemática cotidiana y son fundamentales para comprender conceptos más avanzados. Entre ellas encontramos la suma, resta, multiplicación y división de números.

En este apartado, vamos a ir un poco más lejos, empezamos a trabajar con los conceptos de ***potencia, raíz y logaritmo***.

Potenciación

Así como el producto es una sucesión de sumas, donde el factor que multiplica nos indica cuantas veces debemos sumar el primero:

$$3 \cdot 2 = 3 + 3 = 6$$

$$7 \cdot 5 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35$$

La potencia es una **sucesión de productos** y se escribe de la siguiente manera:

$$b^e = p$$

Y se lee "b elevado a la e-nésima potencia". O más coloquial "b elevado a la e".

Donde:

- b es la **base**. Este es el número que vamos a multiplicar por si mismo una y otra vez.
- e es el **exponente**. Nos indica cuántas veces debemos multiplicar la base.
- p es la **potencia**. Es el resultado de la operación.

Resolvamos un ejemplo para que sea un poco más claro:

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 16 \cdot 4 = 64$$

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

Potencias de números negativos

Al resolver potencias debemos tener cuidado con el **signo de la base**. Los dos ejemplos anteriores no hubo problema porque teníamos bases positivas. Pero ¿Qué pasa si nos encontramos con una base negativa?

$$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 9 \cdot (-3) = -27$$

Como se muestra en el ejemplo, debemos multiplicar el signo también aplicando la **regla de los signos** que vimos en una unidad anterior. Si empezamos a resolver potencias negativas vamos a poder notar algo curioso:

$$(-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = 25 \cdot (-5) \cdot (-5) = -125 \cdot (-5) = 625$$

$$(-6)^3 = (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) = 36 \cdot (-6) = -216$$

$$(-9)^2 = (-9) \cdot (-9) = 81$$

Empezamos a notar un patrón. Cuando la **base es negativa**:

- Si el **exponente es par** el resultado es **positivo**.
- Si el **exponente es impar** el resultado es **negativo**.

IMPORTANTE: no es lo mismo tener que resolver $(-3)^2$, que resolver -3^2. En el caso $(-3)^2$ **multiplicamos tanto el signo como el número** $(-3) \cdot (-3) = 9$. Pero, si el número no estuviera entre paréntesis, **multiplicamos el número dejando fuera el signo** $-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$.

Propiedades de la potencia

Las potencias tienen algunas propiedades que nos pueden facilitar el resolver distintas operaciones.

Producto de potencias de igual base

Cuando tenemos un producto de dos potencias, los exponentes se suman **siempre y cuando sean de igual base**.

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5}$$

Probemos resolver ambos lados del igual para ver si es cierto

$$(2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^8$$

$$8 \cdot 32 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$$

$$256 = 256$$

Esto **no aplica si las bases son distintas**.

$$2^3 \cdot 3^5 \neq (2 \cdot 3)^{3+5}$$

De forma general podemos expresarlo como:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Cociente de potencias de igual base

Cuando tenemos un cociente (división) de potencias de igual base, los exponentes se restan.

$$\frac{2^9}{2^7} = 2^{9-7} = 2^2$$

$$\frac{7^{16}}{7^{15}} = 7^1$$

De forma general

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Al igual que en el producto, esta propiedad **solo se cumple cuando las bases son iguales**.

Potencia de una potencia

Cuando tenemos una potencia elevada a otra potencia, los **exponentes se multiplican**.

$$(5^2)^3 = 5^{2\cdot 3} = 5^6$$

En general:

$$(a^n)^m = a^{n\cdot m}$$

Propiedad distributiva

De forma similar a la que la multiplicación es distributiva respecto de la suma y la resta, la potencia **es distributiva respecto de la multiplicación y la división**.

$$(2 \cdot 4 \cdot 7)^2 = 2^2 \cdot 4^2 \cdot 7^2$$

Resolvamos ambas partes del igual para verificar:

$$(56)^2 = 4 \cdot 16 \cdot 49$$

$$3136 = 3136$$

De forma general:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Lo mismo aplica a la división

$$\left(\frac{10}{5}\right)^3 = \frac{10^3}{5^3}$$

$$(2)^3 = \frac{1000}{125}$$

$$8 = 8$$

De forma general:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Siempre y cuando $b \neq 0$ ya que no se puede dividir por cero.

Casos particulares de la potencia

- Potencias de exponente 1: todo número elevado a la primera potencia da como resultado el número original.

$$a^1 = a$$

$$7^1 = 7 \qquad (-214)^1 = -214 \qquad 65839^1 = 65839$$

- Potencias de exponente 0: todo número elevado a la potencia cero da como resultado 1.

$$a^0 = 1$$

$$5^0 = 1 \qquad (-921)^0 = 1 \qquad 16948^0 = 1$$

- Potencias de exponente negativo: cuando el exponente de la potencia es negativo es lo mismo que tener el inverso multiplicativo de la base.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$5^{-1} = \frac{1}{5} \qquad 3^{-4} = \frac{1}{3^4} \qquad 1412^{-2} = \frac{1}{1412^2}$$

Hasta el momento, todas las potencias que venimos trabajando tienen exponentes pertenecientes al conjunto de los enteros. Pero ¿Qué pasa cuando el exponente no es un número entero? ¿Puede ser una fracción? La respuesta es **sí**, pero estos casos ya pasan a ser **raíces**.

Raices

La raíz es una operación que nos permite encontrar un número que, elevado a cierta potencia, nos da el número original. Es decir, nos permite calcular la base conociendo la potencia y el exponente. Se escribe de la siguiente manera:

$$\sqrt[n]{a} = r$$

Donde:

- $\sqrt{}$: Es el símbolo para indicar que es una raíz.
- n: Es el índice de la raíz, si no se indica cual es se asume que es 2.
- a: es el radicando, es decir, aquello a lo que se le va a calcular la raíz.
- r: es el resultado de la raíz.

La raíz se interpreta como "¿Qué número elevado a la n da como resultado a?".

Mencionamos antes que era un caso particular de la potencia donde el exponente era una fracción. ¿Por qué?

El índice de la raíz es, nada más y nada menos, que el denominador del exponente.

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

Sabiendo que es una potencia, entonces debe cumplir con las mismas **propiedades**.

Propiedad distributiva

La raíz es distributiva respecto de la **multiplicación y la división**.

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \qquad\qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Ejemplos

$$\sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{25}$$

$$\sqrt{100} = 2 \cdot 5$$

$$10 = 10$$

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}$$

$$\sqrt{0{,}5625} = \frac{3}{4}$$

$$0{,}75 = 0{,}75$$

Raíz de Potencia

Cuando tenemos una raíz de una potencia, se puede expresar como una potencia donde el exponente tiene el exponente original como numerador y el índice de la raíz como denominador:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

Por ejemplo:

$$\sqrt{2^4} = 2^{\frac{4}{2}}$$

$$\sqrt{16} = 2^2$$

$$4 = 4$$

Radicandos negativos

Trabajando con radicandos positivos, todas las raíces tienen solución. Algunas tienen soluciones directas:

$\sqrt[3]{125} = 5$ $\qquad$ $\sqrt{64} = 8$ $\qquad$ $\sqrt[7]{128} = 2$

Otras tienen soluciones más no tan directas:

$$\sqrt{5} \approx 2{,}23$$

$$\sqrt[3]{28} \approx 3{,}036$$

Nota: ≈ significa "aproximadamente".

Pero todas se pueden calcular. ¿Qué pasa cuando el radicando es negativo?

$$\sqrt[3]{-125} = -5$$

$$\sqrt[7]{-128} = -2$$

$$\sqrt{-4} = ?$$

Si el índice de la raíz es impar, entonces no hay ningún problema, se puede calcular. Pero cuando el índice es par, si recordamos los casos de las potencias, no hay ningún número negativo real que multiplicado por si mismo de un número negativo. Por lo tanto, podríamos definirlo en 4 casos:

- Índice par y radicando positivo: resultado positivo.
- Índice impar y radicando positivo: resultado positivo.
- Índice impar y radicando negativo: resultado negativo.
- Índice par y radicando negativo: no tiene solución en los reales.

Raíz principal

Habíamos dicho que, cuando elevábamos un número negativo al cuadrado, este daba como resultado un número positivo. Por ejemplo:

$$(-3)^2 = 9$$

Entonces, si nos propusieran el ejercicio $\sqrt{9}$ ¿El resultado sería 3 o -3?

Ambos casos son válidos, los dos resuelven la raíz. En principio vamos a tomar el valor positivo, el cual es considerado la ***raíz principal***. A medida que profundicemos en conceptos matemáticos, trabajaremos con fenómenos que requieren analizar ambos casos y no solo el principal.

En el caso de raíces de índice impar, como, no hay ambigüedad: $\sqrt[3]{-125} = -5$. No hay otro caso posible ya que $5^3 = 125$.

Suma de raíces

Al sumar raíces, si tienen el mismo índice y radicando, podemos expresarlo de forma abreviada. Ejemplo:

$$\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$$

Esto nos puede servir para simplificar expresiones más complejas.

$$\frac{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5}}{3}=\frac{3\sqrt[3]{5}}{3}=\sqrt[3]{5}$$

Producto de raíces

Al multiplicar raíces, si tienen el mismo índice, podemos unir todas las raíces bajo una misma. En forma general:

$$\sqrt[i]{a}\cdot\sqrt[i]{b}\cdot\sqrt[i]{c}=\sqrt[i]{a\cdot b\cdot c}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{18}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{4}$$

$$\sqrt[3]{18\cdot 3\cdot 4}$$

$$\sqrt[3]{216}=6$$

Si no tuvieran el mismo índice, existe la posibilidad de unirlas en una misma raíz aplicando el procedimiento de **índice común**.

Índice común

Cuando trabajamos con varias raíces de distinto índice, puede ser útil expresarlas con un mismo índice, especialmente para sumarlas, restarlas o compararlas. A esto se lo llama **reducir a índice común**.

Para hacerlo, se busca el mínimo común múltiplo (MCM) de los índices.

Ejemplo:

Queremos operar $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{7}$

- Índices: 2 y 3.
- MCM(2;3)=6

$$5^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}}\cdot 7^{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}}=5^{\frac{3}{6}}\cdot 7^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{5^3}\cdot\sqrt[6]{7^2}=\sqrt[6]{125\cdot 49}$$

Extraer Factores de una raíz

La extracción de factores consiste en separar una raíz en dos factores, uno de los cuales sea una raíz exacta. Esto permite simplificar la expresión.

Por ejemplo:

$$\sqrt{50}$$

Se puede expresar cómo

$$\sqrt{25 \cdot 2}$$

Sabemos que $25 = 5^2$ entonces lo reemplazamos en la expresión de arriba

$$\sqrt{5^2 \cdot 2}$$

Distribuimos la raíz

$$\sqrt{5^2} \cdot \sqrt{2}$$

Por propiedades, se sabe que $\sqrt{5^2} = 5$. Entonces nos queda:

$$5\sqrt{2}$$

Este procedimiento es muy útil para simplificar expresiones y facilitar operaciones entre raíces.

Racionalización

Racionalizar significa eliminar raíces del denominador de una fracción. En matemáticas, se prefiere no dejar raíces en el denominador, por cuestiones de notación y simplificación.

¿Cómo se aplica?

Si la raíz está sola, se multiplica el numerador y el denominador de la fracción por la misma raíz.

Ejemplo:

$$\frac{12}{\sqrt{5}}$$

Para racionalizar multiplicamos por $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$.

$$\frac{12}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

Si prestamos atención

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

Por lo que técnicamente estamos multiplicando la expresión original por 1, que es el elemento neutro del producto. Por lo tanto, no estamos alterando la expresión original.

Ahora, si la raíz esta operando con un segundo término entonces **multiplicamos por el conjugado**.

Ejemplo:

$$\frac{7}{2+\sqrt{3}}$$

Para obtener el conjugado lo único que debemos hacer es tomar el denominador y cambiar el signo que acompaña a la raíz. Entonces:

$$\overline{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

Nota: la barra arriba de los términos indica el conjugado.

Ahora, multiplicando arriba y abajo por el conjugado nos queda:

$$\frac{7}{\left(2+\sqrt{3}\right)} \cdot \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)}$$

Aplicamos distributiva en ambos términos:

$$\frac{7\cdot 2 - 7\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 2 - 2\cdot\sqrt{3} + \sqrt{3}\cdot 2 - \sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}$$

$-2\sqrt{3} + \sqrt{3}\cdot 2 = 0$ por lo que resulta en:

$$\frac{14-7\sqrt{3}}{4-3} = \frac{\left(14-7\sqrt{3}\right)}{1} = 14-7\sqrt{3}$$

Logaritmos

Un logaritmo es una operación matemática que responde a la siguiente pregunta:

"¿A qué exponente debo elevar una determinada base para obtener un número dado?"

Dicho de otra manera, el logaritmo de un número es el exponente al cual hay que elevar una base para obtener ese número. Se expresa

$$\log_b a = c \iff b^c = a$$

Donde

- b es la **base** del logaritmo.
- a es el **argumento** (número del que deseamos conocer el logaritmo.

- c es el **resultado,** es decir, es la potencia a la que debemos elevar la **base** para obtener el **argumento.**

Para que exista el logaritmo de un número, debe cumplirse una serie de condiciones:

- La base debe ser **positiva** (> 0) y distinta de 1 ($\neq 1$).
- El argumento debe ser positivo (> 0).

Ejemplos:

- $\log_2 8 = 3$ ya que $2^3 = 8$
- $\log_{-3} 4 = \nexists$. Por definición la base debe ser positiva.
- $\log_1 10 = \nexists$. Por definición del logaritmo, la base no puede ser 1.
- $\log_5 -25 = \nexists$. Ya que el argumento es negativo, y por definición debe ser mayor a 0.

Nota: el símbolo $\nexists$ significa "no existe".

Casos particulares:

- $\log_a 0 = \nexists$. Sin importar la base que se elija, no hay ninguna potencia que dé como resultado 0, por lo que los logaritmos con argumento 0 no existen.
- $\log_a a = 1$. Si la base y el argumento coinciden, el resultado es uno, ya que cualquier número elevado a la primera potencia da el mismo número.

  $18^1 = 18$ $\quad$ $1220^1 = 1220$ $\quad$ $83527^1 = 83527$

- $\log_a 1 = 0$. Si el argumento del logaritmo es uno, sin importar su base, da como resultado 0, ya que cualquier número elevado a la 0 da 1.

Entonces:

- $\log_{18} 18 = 1$
- $\log_{1220} 1200 = 1$
- $\log_{83527} 83527 = 1$

Logaritmos de potencias:

Cuando tenemos un logaritmo de la forma $\log_b a^n$, la potencia puede bajarse multiplicando:

$$\log_2 4^5 = 5 \cdot \log_2 4 = 5 \cdot 2 = 10$$

Logaritmos de productos y divisiones

Cuando tenemos un logaritmo, donde el argumento es un producto de dos o más factores, se puede expresar como la suma de los logaritmos de cada factor por separado:

$$\log_{\mathrm{b}}(n \cdot m) = \log_b n + \log_b m$$

Ejemplo:

$$\log_3(9 \cdot 81) = \log_3 9 + \log_3 81 = 2 + 4 = 6$$

Por otro lado, si el argumento en lugar de ser un producto fuera un cociente, podría expresarse como la **resta** de los logaritmos de cada término:

$$\log_b \left(\frac{n}{m}\right) = \log_b n - \log_b m$$

Ejemplo:

$$\log_4 \frac{256}{64} = \log_4 256 - \log_4 64 = 4 - 3 = 1$$

Otras propiedades:

- $\log_a a^x = x$. Si la base coincide con el argumento, y este último está elevado a una potencia, el resultado será esta potencia.

Ejemplo:

$$\log_2 2^4 = 4$$

Básicamente, estamos preguntando "¿A qué potencia debemos elevar el 2, para que nos de 2 a la cuarta potencia?" La respuesta está en la misma pregunta.

- $a^{\log_a x} = x$. Si elevamos un número a, a un logaritmo con base a, el resultado será el argumento de este logaritmo.

Ejemplo:

$$64^{\log_{64} 256} = 256$$

Acá básicamente estamos preguntando "¿Qué pasa si elevo a a la potencia que hace que a de como resultado x?".

Logaritmos más comunes

Si bien ante la diversidad de problemas de ingeniería podemos usar todo tipo de logaritmos con distintas bases, existen dos que aparecen de una forma más frecuente.

- **Logaritmo común**: es el logaritmo en base 10. Por lo general, si encontramos un logaritmo sin base, se asume que es base 10:

$$\log_{10} x = \log x$$

- **Logaritmo natural:** es el **logaritmo en base *e*** (*siendo e el número irracional que conocimos algunas unidades atrás*) y se escribe con la abreviatura:

$$\log_e x = \ln x$$

Precisión en los cálculos

En matemáticas, y especialmente en contextos científicos o técnicos, es fundamental considerar el nivel de precisión con el que trabajamos. Cuando realizamos operaciones, ya sea con números exactos o aproximaciones, debemos ser conscientes de cuánto confiamos en los resultados obtenidos.

¿Qué significa precisión?

La precisión se refiere a cuántas cifras significativas tiene un número, o cuán cerca está una medida de su valor real. A mayor cantidad de cifras significativas, más preciso es el número.

Por ejemplo:

3,1416 es más preciso que 3,14.

Decir que un objeto mide 10 m con una regla común no tiene la misma precisión que decir que mide 10,003 m con un instrumento más exacto.

Importancia de la precisión

Una diferencia mínima puede ser irrelevante en algunas situaciones (como una medida casera), pero crítica en otras, como en la fabricación de componentes médicos o piezas de ingeniería. Por eso, siempre es importante:

- Tener en cuenta cuántas cifras significativas debemos usar.
- Especificar claramente si un resultado es exacto o aproximado.
- Indicar el grado de error aceptable en cada contexto.

Cifras significativas

Las cifras significativas son los dígitos de un número que expresan con certeza su precisión. Indican cuánta información útil contiene un valor medido o calculado y cuán confiables son los dígitos presentados.

- Todos los dígitos distintos de cero siempre son significativos.

  Ejemplo: 123 tiene 3 cifras significativas.

- Los ceros entre cifras significativas también lo son.

  Ejemplo: 1023 tiene 4 cifras significativas.

- Los ceros a la izquierda (antes del primer número distinto de cero) no son significativos.

  Ejemplo: 0.0045 tiene 2 cifras significativas (4 y 5).

- Los ceros a la derecha del número decimal son significativos.

Ejemplo: 5.00 tiene 3 cifras significativas.

- En números enteros sin coma decimal, los ceros finales pueden ser ambiguos.

Ejemplo: 1200 puede tener 2, 3 o 4 cifras significativas, según el contexto.

Redondeos

Cuando trabajamos con cálculos matemáticos, muchas veces optamos por redondear. En principio puede ser pensado para poder simplificar los cálculos, no es lo mismo multiplicar decimales de 8 cifras que multiplicar otros de 2 cifras, el segundo caso resulta más sencillo.

Pero no es la única utilidad de redondear, el hacerlo también sirve para no afirmar que conocemos una precisión que en realidad no tenemos. Si al operar dos números medidos con reglas de 20 centímetros, obtenemos un resultado un resultado en micrómetros (una unidad 10.000 veces menor) estaríamos diciendo que conocemos más de lo que en realidad sabemos, y esto podría generar conflictos y dificultades en situaciones críticas de la ingeniería.

Redondeo por truncamiento

Consiste en cortar el número en la cantidad de cifras significativas deseada. Por ejemplo, si tuviéramos que redondear el número $37{,}1283294$ a cuatro cifras significativas, solo lo cortaríamos en el cuarto dígito empezando desde la izquierda, es decir el 2. De esta forma resulta

$$37{,}1283294 \approx 37{,}12$$

Redondeo por exceso

En este caso cortamos el número en la cantidad de cifras significativas deseadas, pero a la última cifra le sumamos uno. Por ejemplo, si tuviéramos que redondear $9{,}7394213248$ a 5 cifras significativas nos quedaría:

$$9{,}7394213248 \approx 9{,}7395$$

Redondeo al valor más próximo

Para este redondeo, se corta el número en la cantidad de cifras significativas deseada y se observa el siguiente dígito. Si el número original continúa con un dígito mayor o igual a 5 se suma uno a la última cifra significativa. De lo contrario, simplemente queda igual. Por ejemplo:

Redondear el número 1,2948924398 a 4 cifras significativas.

- Primero cortamos el número $1{,}2948924398 \approx 1{,}294$
- Luego miramos el número siguiente. En este caso el 8.
- Como $8 \geq 5$, sumamos 1 al cuarto dígito. Quedando finalmente que:

$$1{,}2948924398 \approx 1{,}295$$

Vamos a otro caso. Redondear el número 3,4932492 a 5 cifras significativas.

- Cortamos el número $3{,}4932492 \approx 3{,}4932$
- Observamos el siguiente dígito (4).
- Como $4 < 5$ el número queda sencillamente recortado sin aplicar una operación extra. Finalmente:

$$3{,}4932492 \approx 3{,}4932$$

Notación Científica

La notación científica es una forma de escribir números muy grandes o muy pequeños de manera más concisa y precisa. Para expresarlos se utiliza la siguiente expresión:

$$a \times 10^{n}$$

Donde:

- a son las cifras significativas que queremos representar. Por lo general es mayor a 1 y siempre es menor que 10.
- n es un número entero (positivo o negativo) que indica cuántas posiciones se movió la coma decimal.

Por ejemplo:

$$5.100.000.000.000 = 5{,}1 \times 10^{12}$$

La coma originalmente se encuentra al final del número. Podemos contar cuántos espacios se desplazó la coma para llegar al número 5,1. En este caso, fueron 12 espacios hacia la izquierda.

Veamos otro ejemplo

$$0{,}0000000000329 = 3{,}29 \times 10^{-11}$$

En este caso la coma se desplazó 11 espacios a la derecha, por lo que el exponente es -11. Pero ¿Por qué es negativo?

En general:

- Si el número que queremos representar es muy grande, el exponente será positivo.
- Si el número que queremos representar es muy chico (*mayor que 0 pero mucho menor que 1*) entonces el exponente será negativo.

Expresiones algebraicas

En matemática, muchas veces no basta con trabajar solo con números: necesitamos representar relaciones, patrones o cantidades que pueden cambiar. Para eso, usamos letras, llamadas **variables**, y combinaciones de operaciones. A estas combinaciones se las conoce como **expresiones algebraicas**.

Una expresión algebraica es una **forma de escribir relaciones matemáticas que involucran números, letras (variables) y operaciones** como la suma, la resta, la multiplicación, la división o la potenciación. Estas expresiones nos permiten generalizar cálculos, modelar situaciones y resolver problemas que involucran cantidades desconocidas o variables.

Por ejemplo:

El doble de un número incrementado en 7 unidades

$$2.x + 7$$

En la expresión mostrada, nos referirnos a “un número” sin saber exactamente cuál es. Ese número podría ser 10, 1223, 837… o cualquier otro. Como no lo conocemos, en matemáticas solemos representarlo con una letra, como $\boldsymbol{x}$.

El uso de estas variables (llamada así porque puede tomar distintos valores, es decir *varía*) nos permite generalizar situaciones, resolver problemas y crear modelos que se adaptan a diferentes contextos. Por ejemplo, si queremos calcular cuánto pagaremos por comprar cierta cantidad de entradas a un espectáculo, podríamos usar la expresión:

$$precioTotal = x\ .precioEntrada$$

Elementos de una expresión algebráica

Toda expresión algebraica está formada por diferentes partes que cumplen funciones específicas:

- Término: es cada una de las partes separadas por los signos + o −. Por ejemplo, en la expresión $3x\ -\ 5 + 2$, hay tres términos: 3x, 2 y −5.
- Variable: es la letra que se usa para representar un número desconocido o que puede cambiar. En el ejemplo anterior, x es una variable.

Recordemos que siempre que resolvemos una expresión, debemos separar en términos. Por ejemplo:

$$3\,.\,2 + 7.4 - 6$$

En la expresión de arriba, los términos son tres: 3.2, 7.4 y 6. Primero resolvemos los tres por separado y luego resolvemos las sumas y restas. La única ocasión en la que esto cambia es cuando agregamos paréntesis.

Por ejemplo:

$$(3+2).6$$

En este caso, primero hacemos la suma y recién ahí multiplicamos el resultado por 6.

Recordemos rápidamente el orden de las operaciones antes de pasar al siguiente tema:

- Paréntesis: Primero se resuelven las operaciones dentro de paréntesis ( ), corchetes [ ] o llaves { }, comenzando desde el grupo más interno.
- Exponentes y raíces: Luego se resuelven las potencias y raíces.
- Multiplicaciones y divisiones: A continuación, se realizan las multiplicaciones y divisiones, en el orden en que aparecen de izquierda a derecha.
- Sumas y restas: Finalmente, se realizan las sumas y restas, también en el orden en que aparecen de izquierda a derecha.

A partir de las expresiones algebraicas, que nos permiten representar situaciones con variables, surge la necesidad de resolver problemas concretos: ¿cuánto vale esa variable? Se nos presentarán ocasiones en la vida cotidiana donde queramos responder a esta pregunta.

- Sabiendo que un paquete de fideos sale $750, ¿Cuántos voy a poder comprar si tengo $3500? Esta situación que puede ser tan cotidiana, ya nos implica plantearnos una **ecuación**, aunque lo hacemos sin pensarlo.

Ecuaciones

Las ecuaciones son **igualdades matemáticas** que incluyen una o más variables y que se cumplen solo para ciertos valores de esas variables. En otras palabras, son expresiones que afirman que dos cantidades son iguales, y nuestro objetivo será encontrar qué valor o valores hacen verdadera esa afirmación.

A diferencia de una simple expresión algebraica, una ecuación tiene un signo igual (=) que separa dos partes: el miembro izquierdo y el miembro derecho. Resolver una ecuación significa encontrar el valor de la variable que hace que ambos miembros sean iguales.

Las ecuaciones son fundamentales en matemática porque nos permiten modelar y resolver problemas del mundo real, desde calcular precios hasta predecir comportamientos físicos o económicos. Son una herramienta clave para la resolución de situaciones que involucran cantidades desconocidas.

Ejemplo:

$$x + 6 = 9$$

Acá nos estamos preguntando cuánto debemos sumarle a 6 para que nos de 9. Claramente el número es 3 ya que 3 + 6 da 9. ¿Pero qué pasaría si tuviéramos una expresión más compleja?

$$\frac{2x + 3 - 4^2}{7} = -1$$

¿Cómo averiguamos el valor de x en este caso?

Resolución de ecuaciones

Paso 1: Identificar lo que se quiere hallar

La letra x es la incógnita. Queremos saber que valor debe tener x para que toda la cuenta de la izquierda de como resultado -1 (el término de la derecha).

Paso 2: Despejar la incógnita

Para encontrar el valor de x, debemos "dejarla sola" de un lado de la ecuación. Para eso, vamos deshaciendo las operaciones que la rodean, en orden inverso al que aparecen. Para esto, vamos resolviendo desde lo que está "más lejos" de la x hasta lo que lo afecta de forma más directa.

En este caso, como el 7 está dividiendo a **TODA** la expresión izquierda, debe ser lo primero que anulemos. Para lograrlo, simplemente aplicamos la operación inversa, es decir, multiplicamos por 7.

$$\frac{(2x + 3 - 4^2)}{7} \cdot 7 = -1 \,.\, 7$$

Tené en cuenta que, siempre que aplicamos una operación, debemos hacerlo a **ambos lados del igual**, sino la expresión dejaría de ser igual. Podes pensarlo como una balanza, si agregamos peso de un solo lado pierde el equilibrio.

Entonces, en la expresión anterior, cómo el 7 está dividiendo y multiplicando al mismo tiempo, podemos simplificarlo ya que da 1.

$$\frac{(2x + 3 - 4^2)}{\cancel{7}} \cancel{7} = -7$$

Quedando:

$$2x + 3 - 4^2 = -7$$

Ahora, cómo podríamos resolver la potencia y hacer la resta para unificar el 3 con el 4^2:

$$2x + 3 - 16 = -7$$

$$2x - 13 = -7$$

Ahora, para dejar la x sola, tenemos que sacarnos de encima el 2 que la multiplica y el 13 que está restando. Separando en términos, lo que primero que despejamos es el -13

$$2x - 13 + 13 = -7 + 13$$

$$2x + 0 = 6$$

Finalmente, para dejar la x sola, debemos anular el 2 que la multiplica:

$$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$$

$$x = 3$$

Podemos validar el resultado, reemplazando lo obtenido en la variable de la expresión original:

$$\frac{2x + 3 - 4^2}{7} = -1$$

$$\frac{2.3 + 3 - 4^2}{7} = -1$$

$$\frac{6 + 3 - 16}{7} = -1$$

$$-\frac{7}{7} = -1$$

$$-1 = -1$$

Identidad matemática

En matemática, una identidad es una igualdad que siempre se cumple, sin importar el valor que tomen las variables involucradas (dentro de su dominio). Una identidad es una igualdad verdadera para todos los valores posibles de la variable.

¿En qué se diferencia de una ecuación?

- Una ecuación se cumple solo para algunos valores (por ejemplo, x = 2).
- Una identidad se cumple siempre, es decir, para cualquier valor de x.

Por ejemplo:

$$a + b = b + a$$

(Esta es la propiedad conmutativa de la suma. Siempre es verdadera, sin importar qué valores tengan a y b).

$$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

(Si desarrollás ambos lados, vas a ver que son equivalentes para cualquier valor de x).

$$(x+2).(x+2) = x^2 + 4x + 4$$

$$x.x + x.2 + 2.x + 2.2 = x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 4x + 4$$

Importancia de las identidades

Las identidades permiten transformar expresiones sin cambiar su valor, lo que es muy útil al simplificar, factorizar, resolver ecuaciones o modelar situaciones.

Inecuaciones

Las inecuaciones son expresiones matemáticas que, en lugar de establecer una igualdad entre dos expresiones (como ocurre en una ecuación), plantean una desigualdad. En otras palabras, indican que una cantidad es mayor, menor, mayor o igual, o menor o igual que otra. Se expresan de la forma

$$expresión1 \leq expresión2$$

Donde la desigualdad puede ser de 4 tipos

- $<$: Menor que.
- $>$: Mayor que.
- $\leq$: Menor o igual que.
- $\geq$: Mayor o igual que.

Las inecuaciones nos permiten representar límites, restricciones o condiciones en distintas situaciones cotidianas o problemas matemáticos. Por ejemplo, si algo no puede superar cierto valor, o si un gasto no debe ser inferior a cierta cantidad.

A diferencia de las ecuaciones, las inecuaciones tienen como solución un **rango de valores** y no un valor único. Además, al tener una desigualdad, el sentido de esta cambia al multiplicar los términos por -1.

Por ejemplo:

$$\frac{-x+7}{2} < 5$$

$$\frac{-x+7}{2}\cdot 2<5\cdot 2$$

$$-x+7<10$$

$$-x+7-7<10-7$$

$$-x<3$$

Anulo el signo de la x multiplicando ambas expresiones por -1:

$$-x\cdot(-1)>3\cdot(-1)$$

$$x>-3$$

Entonces x puede tomar cualquier valor mayor a -3. Podemos validar reemplazando la x de la expresión original por cualquier valor que cumpla la condición:

$$\frac{-(-2)+7}{2}<5$$

$$\frac{2+7}{2}<5$$

$$\frac{9}{2}<5$$

$$4{,}5<5$$

Cómo expresamos la solución

La expresión de la inecuación se expresa de la siguiente manera:

$$x\in(-\infty;-3)$$

Esta notación se conoce como **intervalo**. Veamos qué significan.

Intervalos

En matemáticas, un intervalo es un conjunto de números reales que se encuentran entre dos valores dados, y que puede incluir o no esos valores extremos, según el caso.

Los intervalos se utilizan principalmente para expresar soluciones de inecuaciones o describir conjuntos de números de manera más compacta y ordenada.

- **Intervalo cerrado** $[a,b]$: es un tipo de intervalo cuyos extremos están incluidos. Es decir, si $x\in[-7;5]$ quiere decir que, para que la desigualdad se cumpla, x puede ser cualquier valor entre estos extremos, **INCLUSO** -7 y 5.
- **Intervalo abierto** (a,b): en este caso, los extremos quedan por fuera de los valores que x puede tomar. Para $x\in(-7;5)$, x no podría valer ni -7 ni 5

porque la igualdad no se cumpliría.
En el ejemplo de inecuación que resolvimos anteriormente, el intervalo resultante es $(-\infty, -3)$. Entonces, si reemplazáramos x por -3 en la expresión original, la desigualdad no se debería cumplir.

$$\frac{-(-3)+7}{2} < 5$$

$$\frac{3+7}{2} < 5$$

$$\frac{10}{2} < 5$$

$$5 < 5$$

Como 5 NO es menor que 5, la desigualdad no se cumple, por tanto, es cierto que el extremo -3 no está incluido.

- **Intervalo semiabierto**: se escribe de la forma $(a, b]$ o $[b, a)$. En estos casos, es solo uno de los extremos que no está incluido.

Aclaración: el ∞, siempre va con paréntesis, ya que este no es un número, en realidad, es una tendencia de crecimiento, por lo que no puede estar incluido.

Polinomios

Entre las expresiones algebraicas (*combinaciones de variables, números y operaciones*), podemos encontrar algunas que tengan la misma variable elevada a distintas potencias. Por ejemplo:

$$P(x) = 3x^5 + 6x^2 + 2x - 6$$

Estos se conocen como **polinomios**, siempre los **denotamos con una letra mayúscula** seguida de una letra entre paréntesis que será la **variable del polinomio**. Sus características son:

- Tiene sus **coeficientes numéricos** (como 3, 2 y -5), son los números que multiplican de forma directa a la variable. $3x^2$ tiene coeficiente 3.
- Tiene una **variable** (en este caso, x, podríamos encontrar otra letra, pero esta es la más común),
- Y los **exponentes** de la variable son enteros positivos o cero (como x^2, x^1 x^0 $=$ 1). El mayor de estos exponentes nos indica el **grado** del polinomio.
- Todos tienen un término independiente, es decir, un número que no está acompañado de ninguna x. Si no aparece, decimos que es 0.

En el polinomio $3x^5 + 6x^2 + 2x - 6$, tenemos:

- Coeficientes: 3, 6 y 2.
- La variable es x
- El grado es 5, ya que es la mayor potencia a la que se encuentra elevada la variable.
- El término independiente es -6.

Clasificación de polinomios

Los polinomios se pueden clasificar de distintas formas, principalmente según la cantidad de términos que los componen y según su grado.

Según el número de términos

Un término de un polinomio es cada una de las partes que lo integran, separadas por signos de suma o resta. Cada término tiene una parte numérica (coeficiente), una parte literal (la variable) y un exponente.

Podemos clasificar los polinomios de esta manera:

- **Monomio**: un solo término. Por ejemplo: $3x$, $2x^7$, $16x^2$
- **Binomio**: tiene dos términos. Por ejemplo: $x + 6$, $12x^3 - 3x$.
- **Trinomio**: tiene 3 términos. Por ejemplo: $x^6 - 8x^3 + x^2$.

- **Polinomio**: tiene 4 o más términos. Por ejemplo: $3x^4 + x^3 - 6x + 2$

Según el grado del polinomio

Según esto, los polinomios pueden clasificarse como:

- **Polinomio de grado 0**: cuando no hay variable (es un número constante). Por ejemplo: 7.
- **Polinomio de grado 1 (lineal)**: la variable está elevada a la 1. Por ejemplo: $x + 15$.
- **Polinomio de grado 2 (cuadrático)**: La variable está elevada a la 2. Por ejemplo: $x^2 - 6x + 7$.
- **Polinomio de grado 3 (cúbico)**: la variable está elevada a la 3. $2x^3 - 6$.

Y así sucesivamente...

Valor numérico de un polinomio

Puede resultar necesario conocer cuánto vale el polinomio si la variable toma determinado valor. A esto se lo conoce como **valor numérico de un polinomio**. Y se escribe de la siguiente manera:

Siendo $P(x) = x^2 + 2x - 3$

¿Cuál es su valor numérico cuando x vale 7? Para esto, reemplazamos todas las x por el número 7:

$$P(7) = 7^2 + 2.7 - 3$$

$$P(7) = 49 + 14 - 3$$

$$P(7) = 60$$

Entonces, el valor numérico del polinomio $P(x)$ cuando x vale 7 es 60.

Operaciones con polinomios

Suma y resta de polinomios

Para sumar o restar polinomios, simplemente debemos sumar o restar los términos semejantes, es decir, aquellos que tienen la misma variable elevada al mismo exponente.

Por ejemplo:

$$P(x) = 3x^3 + 2x - 7$$

$$R(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x$$

$$P(x) + R(x) = ?$$

Para resolver esto, agrupamos por las variables con los mismos exponentes y resolvemos la **suma de sus coeficientes**

$$3x^3 + 2x - 7 + 5x^3 - 2x^2 + 3x$$

Agrupamos

$$3x^3 + 5x^3 - 2x^2 + 2x + 3x - 7$$

Sumamos los coeficientes:

$$(3 + 5)x^3 - 2x^2 + (2 + 3)x - 7$$

El resultado nos queda:

$$8x^3 - 2x^2 + 5x - 7$$

En el caso de las restas, debemos cambiar todos los signos del polinomio que esta restando, y luego resolver igual que una suma

$$P(x) - R(x) = ?$$

$$3x^3 + 2x - 7 - (5x^3 - 2x^2 + 3x)$$

Invertimos los signos del paréntesis para poder sacarlos

$$3x^3 + 2x - 7 - 5x^3 + 2x^2 - 3x$$

Es importante que TODOS los signos de los términos del polinomio que está restando, sino el resultado no dará bien.

$$P(x) - R(x) = -2x^3 + 2x^2 - x - 7$$

Aclaración importante: cuando la x no tiene ningún coeficiente acompañándola, en realidad tiene coeficiente 1, solo que este no se escribe.

Multiplicación de polinomios

Multiplicar polinomios implica aplicar la **propiedad distributiva**. Si uno de ellos es un monomio, se multiplica ese término por cada uno de los términos del otro polinomio. Si ambos son polinomios, se multiplica **cada término del primero por cada término del segundo**. Ejemplo:

$$(x^2 - 2)(x^2 + 2x + 1)$$

Aplicamos distributiva:

$$x^2 . x^2 + 2x . x^2 + x^2 - 2 . x^2 - 2.2x - 2.1$$

Siempre respetando la **regla de los signos**. Ahora, para resolver las operaciones, aprovechamos la propiedad de la potencia, donde en el producto de dos potencias de igual base, los exponentes se suman:

$$x^{2+2} + 2x^{1+2} + x^2 - 2x^2 - 4x - 2$$

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$$

División de polinomios

La división de polinomios es un proceso mediante el cual se determina cuántas veces un polinomio (el dividendo) puede ser "contenida" por otro (el divisor), obteniendo un cociente y, en algunos casos, un resto. Este procedimiento se asemeja a la división entre números naturales, aunque implica el trabajo con variables y potencias.

División de un monomio por un polinomio

Cuando el divisor es un monomio, la división se resuelve distribuyendo término a término:

Ejemplo:

$$\frac{6x^3 - 9x^2 + 3x}{3x} = \frac{6x^3}{3x} - \frac{9x^2}{3x} + \frac{3x}{3x} = 2x^2 - 3x + 1$$

Se divide cada término del polinomio por el monomio, aplicando las reglas de los exponentes.

División de polinomios por polinomios (División larga)

Cuando tanto el dividendo como el divisor son polinomios, usamos un procedimiento llamado división larga, que es similar al algoritmo tradicional de división.

Paso a paso:

- Ordenamos ambos polinomios de mayor a menor grado. Si les faltan términos debemos completarlos. Por ejemplo, completar: $3x^4 + 3x$ implica tener todos los exponentes del 0 al 4 presentes en la expresión. Lo hacemos agregando las variables con exponente multiplicadas por 0:

$$3x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 3x + 0$$

- Dividimos el primer término del dividendo por el primer término del divisor. Ese es el primer término del cociente.
- Multiplicamos todo el divisor por ese término, y lo restamos del dividendo.
- Repetimos el proceso con el nuevo polinomio resultante (el residuo parcial).
- Continuamos hasta que el grado del residuo sea menor al del divisor.

Veamos un ejemplo:

Resolver $\frac{P(x)}{Q(x)}$, siendo $P(x) = x^5 + 2x^3 - x - 8$ y $Q(x) = x^2 - 2x + 1$

Primero completamos $P(x)$

$$P(x) = x^5 + 0x^4 + 2x^3 + 0x^2 - x - 8$$

Luego lo disponemos en una tabla de división:

$$\begin{array}{l|l} x^5 + 0x^4 + 2x^3 + 0x^2 - x - 8 & x^2 - 2x + 1 \\ \hline \end{array}$$

Dividimos el primer término de $P(x)$ por el primer término de $Q(x)$, obteniendo así el primer término del cociente.

$$\begin{array}{l|l} x^5 + 0x^4 + 2x^3 + 0x^2 - x - 8 & x^2 - 2x + 1 \\ \hline & x^3 \end{array}$$

Multiplicamos el divisor por el término del cociente hallado y se lo restamos al polinomio $P(x)$.

$$\begin{array}{l|l} x^5 + 0x^4 + 2x^3 + 0x^2 - x - 8 & x^2 - 2x + 1 \\ \hline -(x^5 - 2x^4 + x^3) & x^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^5 + 0x^4 + 2x^3 + 0x^2 - x - 8 & x^2 - 2x + 1 \\ \hline -x^5 + 2x^4 - x^3 & x^3 \\ \hline 0x^5 + 2x^4 + x^3 + 0x^2 - x - 8 & \end{array}$$

Continuamos el proceso hasta que el divisor sea mayor que el dividendo.

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrr|l} & x^5 & + & 0x^4 & + & 2x^3 & + & 0x^2 & - & x & - & 8 & x^2 - 2x + 1 \\ \hline - & x^5 & + & 2x^4 & - & x^3 & & & & & & & x^3 + 2x^2 + 5x + 8 \\ \hline & & & 2x^4 & + & x^3 & + & 0x^2 & - & x & - & 8 & \\ & & - & 2x^4 & + & 4x^3 & - & 2x^2 & & & & & \\ \hline & & & & & 5x^3 & - & 2x^2 & - & x & - & 8 & \\ & & & & - & 5x^3 & + & 10x^2 & - & 5x & & & \\ \hline & & & & & & & 8x^2 & - & 6x & - & 8 & \\ & & & & & & - & 8x^2 & + & 16x & - & 8 & \\ \hline & & & & & & & & & 10x & - & 16 & \end{array}$$

Una vez que llegamos al final, lo que nos queda sin dividir, en este caso $10x - 16$ es el **resto de la división $R(x)$**, y el polinomio hallado es el **cociente de la división $C(x)$**. Para expresar la solución de la división lo anotamos:

$$P(x) = C(x)Q(x) + R(x) \text{ o también } \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Teorema del resto

Este teorema nos dice que si dividimos un polinomio por un binomio de la forma $(x - a)$, entonces el **resto** de esa división es simplemente el **valor del polinomio evaluado en a**. Por lo que, en lugar de hacer toda la división, basta con **reemplazar** la letra x por el número a en el polinomio y hacer la cuenta. El resultado es el mismo que obtendríamos si hiciéramos la división completa y miráramos el resto.

Ejemplo: dado el polinomio $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$, queremos conocer el resto al dividirlo por $x - 2$.

El binomio tiene la forma $x - a$, por lo tanto, al aplicar el teorema, sabemos que $P(2)$ va a ser el resto del polinomio:

$$P(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 + 4(2) - 5$$

$$P(2) = 2.8 - 3.4 + 8 - 5$$

$$P(2) = 16 - 12 + 8 - 5$$

$$P(2) = 7$$

Entonces, el resto de dividir $P(x)$ por $(x - 2)$ es 7.

El teorema del resto es especialmente útil para hallar factores primos de polinomios. Si al dividir un polinomio $P(x)$ por $(x - a)$ el resultado da 0, entonces decimos que $P(x)$ es divisible por $(x - a)$.

Regla de Ruffini (división sintética)

La Regla de Ruffini es un método abreviado para dividir un polinomio por un binomio de la forma $(x - r)$, siempre que el polinomio esté ordenado por grados descendentes y completo (es decir, que no falte ningún grado entre los términos, aunque tenga coeficiente cero).

Este método permite realizar la división de manera más rápida y sencilla que la división larga, especialmente cuando se quiere aplicar el Teorema del Resto o buscar raíces de un polinomio.

¿Cómo se aplica?

Supongamos que queremos dividir $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 4x - 5$ entre $x - 2$.

1. Completamos el polinomio
$$P(x) = 2x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 4x - 5$$

2. Dibujamos una tabla como la siguiente:

	2	0	-3	4	-5
2					

Donde el 2 puesto a la izquierda es el valor de a del binomio divisor $(x-2)$. Si el divisor fuera $(x+2)$ entonces $a=-2$, mucho cuidado al tomar a.

3. Bajo el primer número de la tabla.

	2	0	-3	4	-5
2	↓				
	2				

4. Multiplico ese número por a, (en este caso 2) y el resultado lo escribo debajo del siguiente término.

	2	0	-3	4	-5
		+			
2		4			
	2	4			

5. Repito el proceso hasta llegar al final

	2	0	-3	4	-5
			+	+	+
2		4	8	10	28
	$2x^3$	$4x^2$	$5x^1$	$14x^0$	23

6. Cada uno de los números que resultaron de este procedimiento son **los coeficientes de nuestro nuevo polinomio.** Este tendrá un grado menos que el original, y cada coeficiente multiplicará a la variable elevada a un exponente. Los exponentes van en orden descendiente de izquierda a

derecha. El último número por debajo de la línea (el 23), es el resto de la división. Entonces, ya podemos expresarlo de las formas que vimos antes:

$$\frac{2x^4 - 3x^2 + 4x - 5}{x - 2} = 2x^3 + 4x^2 + 5x + 14 + \frac{23}{x - 2}$$

Factorización

Ya habíamos visto la idea de factorización previamente cuando trabajamos con los números naturales. Pero en este caso lo extenderemos para poder aplicarlo a polinomios. Existen estrategias que nos permiten expresar un polinomio de una forma más simple a través de sus factores primos.

Factor común

El primer paso para factorizar muchas expresiones consiste en identificar si todos los términos tienen algo en común, ya sea un número, una letra o ambos. A esto lo llamamos "sacar factor común". Por ejemplo, en la expresión

$$6x + 12$$

El 6 está distribuido en ambos términos, por lo que podemos "sacarlo fuera".

$$6.(x + 12)$$

Es como aplicar la inversa de la distributiva. Si aplicamos nuevamente la distributiva, obtendríamos nuevamente el término original.

También puede que tengamos variables que se repitan. Por ejemplo:

$$x^3 + 2x^2 - 5x$$

La x se encuentra distribuida en los tres términos. Aplicamos factor común:

$$x(x^2 + 2x - 5)$$

Factor común por grupos

En este caso, dentro de una expresión algebraica, tenemos factores comunes entre grupos de factores. Por ejemplo

$$-5x^3 - 10x^2 + 3x + 6$$

Si nos fijamos, el término $-5x^2$ se encuentra distribuido en los primeros dos términos, y el 3 en los otros dos. Podemos sacarlos fuera:

$$-5x^2(x + 2) + 3(x + 2)$$

Para poder aplicar el factor común por grupos, es importante que los términos que obtengamos sean iguales, en este caso, ambos son $x + 2$. Ahora, los otros dos términos que "sacamos fuera" los podemos agrupar para que quede expresado de la siguiente manera:

$$(-5x^2 + 3).(x + 2)$$

Si intentás aplicar distributiva, volverías a la expresión original.

Productos notables

Los productos notables **son formas especiales de multiplicación que tienen una estructura reconocible**, lo que permite resolverlas rápidamente sin hacer toda la distributiva.

Algunos de los más conocidos son:

- Cuadrado de un binomio:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Ejemplo:

$$(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$(z - 1)^2 = z^2 - 2z + 1$$

- Cubo de un binomio:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

Ejemplo:

$$(x + 3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

$$(x - 2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

- Producto de binomios conjugados o diferencia de cuadrados:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Ejemplo:

$$(x + 2).(x - 2) = x^2 - 4$$

$$(x^3 - z).(x^3 + z) = x^6 - z^2$$

Completar cuadrados

Completar cuadrados es una técnica que consiste en transformar una expresión cuadrática en el cuadrado de un binomio, lo cual resulta útil para resolver ecuaciones o analizar funciones. Por ejemplo, la expresión $\boldsymbol{x}\text{^}\mathbf{2} + \mathbf{6}\boldsymbol{x} + 9$ se puede reescribir como $(\boldsymbol{x} + \mathbf{3})\text{^}\mathbf{2}$. Esta técnica requiere identificar qué término se necesita agregar o quitar para que la expresión forme un trinomio cuadrado perfecto.

Por ejemplo:

Completar cuadrados en la expresión:

$$4x^2 + 4x$$

Tenemos que llevar eso a la forma $a^2 + 2ab + b^2$.

Sabiendo que tenemos el primer término al cuadrado, podríamos decir que $a^2 = 4x^2$

Entonces $a = \sqrt{4x^2} = 2x$

Ahora, el segundo término $4x$ no está elevado al cuadrado, por lo que lo relacionamos con el término $2ab$.

$$4x = 2ab$$

Si a era 2x, entonces nos queda:

$$4x = 2.2x.b$$

Ahora debemos despejar b para poder conocer su valor:

$$4x = 4x.b \to \frac{4x}{4x} = \frac{4x.b}{4x} \to 1 = b$$

Conociendo los valores de a y b, reemplazamos en la expresión de trinomio cuadrado perfecto.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (2x)^2 + 2.2x.1 + 1^2$$

$$4x^2 + 4x + 1$$

Pero ahora ya no tenemos la misma expresión

$$4x^2 + 4x \neq 4x^2 + 4x + 1$$

Por lo que para equilibrar, restamos lo que sobra en la nueva expresión

$$4x^2 + 4x + 1 - 1$$

Finalmente, reescribimos para que nos quede de la forma $(a + b)^2$. Sin olvidarnos de restar lo que sobra:

$$(2x + 1)^2 - 1$$

Fórmula de Bhaskara

Cuando trabajamos con polinomios de grado 2, podemos utilizar la **fórmula resolvente de Bhaskara** para factorizar la expresión. La fórmula tiene la siguiente forma:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esto nos permite hallar las **raíces** del polinomio y expresarlo en término de ellos. Por ejemplo:

Factorizar la expresión $x^2 - 5x - 6$

Identificamos los términos a, b y c.

- a es el coeficiente que acompaña al término cuadrático (x^2). En este caso es 1.
- b es el coeficiente del término lineal (x). Para esta expresión es el -5.
- Finalmente, c es el término independiente -6

Ahora reemplazamos en la fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.(-6)}}{2.1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{12}{2} = 6$$

$$x_2 = \frac{5 - 7}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

Ahora debemos reemplazar x_1 y x_2 en la expresión factorizada de Bhaskara que es

$$a(x - x_1)(x - x_2) \rightarrow 1.(x - 6).(x - (-1) \rightarrow 1(x - 6).(x + 1)$$

Factorización por Ruffini

La división sintética de polinomios (Ruffini) también nos puede servir para expresar un polinomio en su forma factorizada. Para lograrlo, el resto de la división debe dar cero, sino no puede factorizarse.

Por ejemplo: factorizar $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Para poder factorizar, iniciamos probando los divisores del término independiente.

Esto ya aprendimos a hacerlo en ocasiones previas, cuando estudiamos MCM y MCD, que para lograrlo factorizábamos los números naturales.

Divisores de 6: 1,2,3,6.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -6 & 11 & -6 \\
 & & + & + & + \\
1 & & 1 & -5 & 6 \\
\hline
 & 1x^2 & -5x^1 & 6x^0 & 0
\end{array}$$

Cómo da resto 0, podemos expresarlo como el producto del divisor $(x - a)$ multiplicado por el polinomio resultante. Entonces, la factorización en este caso es:

$$(x^2 - 5x + 6).(x - 1)$$

Si aplicamos distributiva, obtendríamos nuevamente el polinomio original.

Trabajo Práctico I – Teoría de Conjuntos

1. Escribí por extensión el conjunto de las vocales del abecedario.
2. Escribí por comprensión el conjunto de los números naturales menores que 10.
3. ¿El conjunto $A = \{49, 245, 77, 23\}$ está incluido en el conjunto $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x\ es\ multiplo\ de\ 7\}$?
4. ¿El elemento $junio$ pertenece al conjunto de meses pares del año?

Seminario Universitario de Ingreso 2026

MÓDULO II

Espacio curricular: Matemática

UTN - FRLP

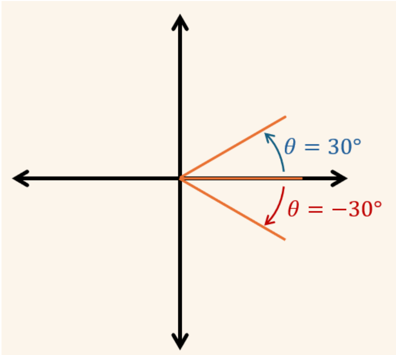
PAICAT "Programa de Acompañamiento a Ingresantes de Carreras Tecnológicas".

Contenido

Trigonometría

La **trigonometría** es una rama de la matemática que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos. Aunque su nombre pueda sonar complejo, sus aplicaciones están **en todas partes**: desde medir la altura de un edificio sin subirlo, hasta calcular la trayectoria de un satélite o diseñar una estructura resistente.

¿Qué es un ángulo?



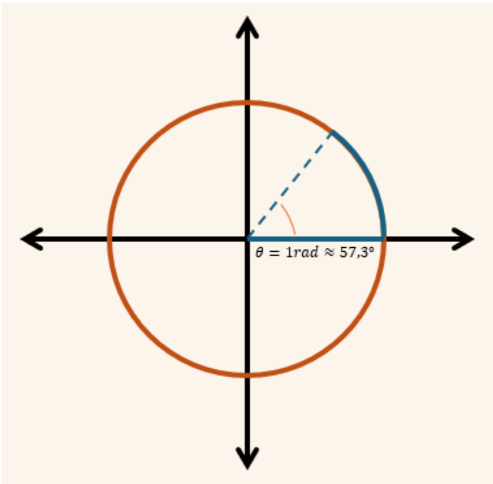
Un **ángulo** mide la apertura entre dos segmentos o líneas **unidas en un punto** conocido como **vértice**. Toma valores positivos siempre que se mide en sentido antihorario y negativos si se mide en sentido horario.

Al hablar de medición, lo normal es buscar asignar una unidad al **mensurando** (*magnitud que se pretende medir*). Cuando medimos distancias es normal escuchar hablar de metros o kilómetros, al pesar alimentos solemos hablar de kilos, con la temperatura hacemos referencia a grados centígrados. Con los ángulos pasa lo mismo, al medirlos hacemos referencia a **grados sexagesimales**, o en ocasiones también podemos utilizar otra unidad llamada **radianes**.

Grados sexagesimales

Se puede observar cómo la medición de los ángulos se realiza de forma circular. Al dar una vuelta completa se recorren 360°. Cada grado puede a su vez ser dividido en 60 minutos (60') y cada minuto en 60 segundos (60'').

Radianes (rad)



Un radián es el ángulo que abarca un arco de longitud igual al **radio** del círculo. Es decir, podría decirse que "caminamos" un trayecto de la circunferencia igual al radio de la misma.

Si observas la figura de la derecha, el radio (*la línea horizontal dibujada en azul*) es de igual longitud a la línea azul dibujada sobre la circunferencia.

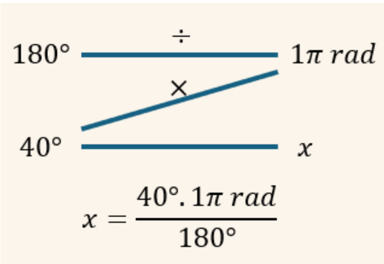
Un radian es el equivalente a $57{,}3°$.

Equivalencias más comunes entre grados y radianes:

Grados sexagesimales	Radianes
30°	$\frac{\pi}{6}$
45°	$\frac{\pi}{4}$
60°	$\frac{\pi}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$
180°	π
360°	2π

Conversión de grados a radianes.

Para poder convertir de grados a radianes podemos aplicar la regla de tres simple. Por ejemplo: cuanto son $40°$ en radianes.



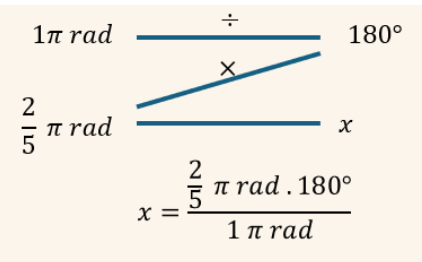
Sabiendo que $180°$ son $1\ \pi\ rad$, $40°$ serán

$$x = \frac{40°.1\pi\ rad}{180°} \rightarrow x = \frac{2}{9}\pi\ rad$$

Lo normal es dejarlo expresado como fracción para no perder precisión en los cálculos.

Conversión de radianes a grados.

Para convertir de radianes a grados aplicamos la misma técnica en sentido inverso. Ejemplo: ¿A cuántos grados equivalen $\frac{2}{5}\ \pi\ rad$?



Sabiendo que $1\ \pi\ rad$ son 180, $20\ \pi\ rad$ serán

$$x = \frac{\left(\frac{2}{5}\ \cancel{\pi\ rad}\ .\ 180°\right)}{1\ \cancel{\pi\ rad}} \rightarrow x = 72°$$

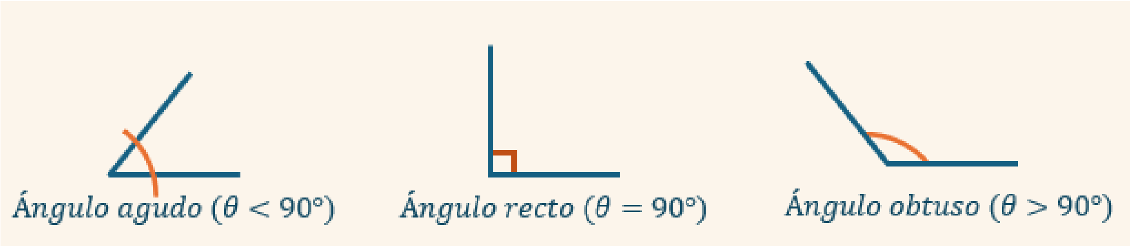
Clasificación de los ángulos

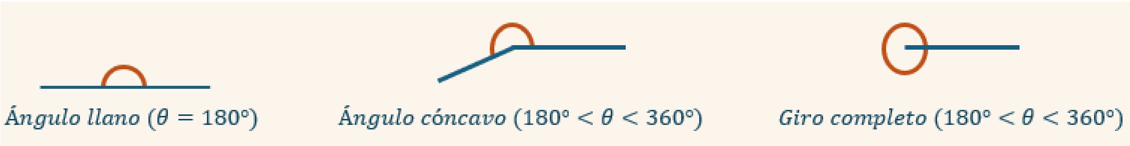
Según su amplitud

Los ángulos dependiendo de su amplitud se pueden clasificar en:

- Agudo $\theta < 90°$.
- Recto $\theta = 90°$.
- Obtuso $90° < \theta < 180°$.

- Llano $\theta = 180°$.
- Cóncavo $180° < \theta < 360°$.
- Giro completo $\theta = 360°$.

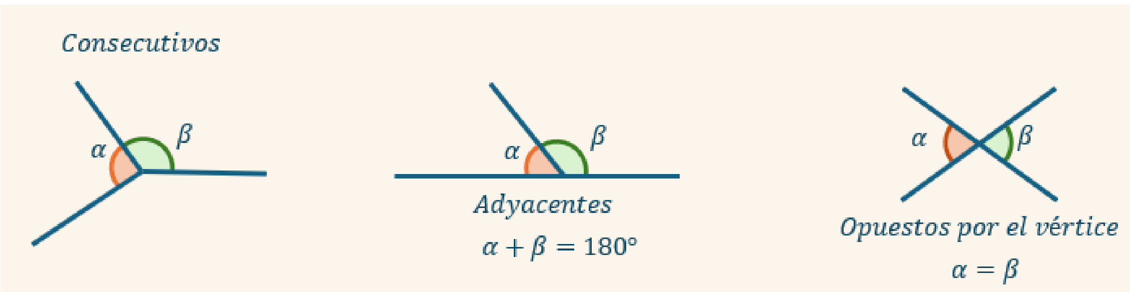




Según la posición de sus lados

Además de la medida, los ángulos también se clasifican según la posición relativa de sus lados:

1. Ángulos consecutivos: Comparten el vértice y un lado común.
2. Ángulos adyacentes: Son consecutivos y sus lados no comunes están en línea recta (forman un ángulo llano).
3. Ángulos opuestos por el vértice: Se forman cuando dos rectas se cruzan. Son iguales entre sí.



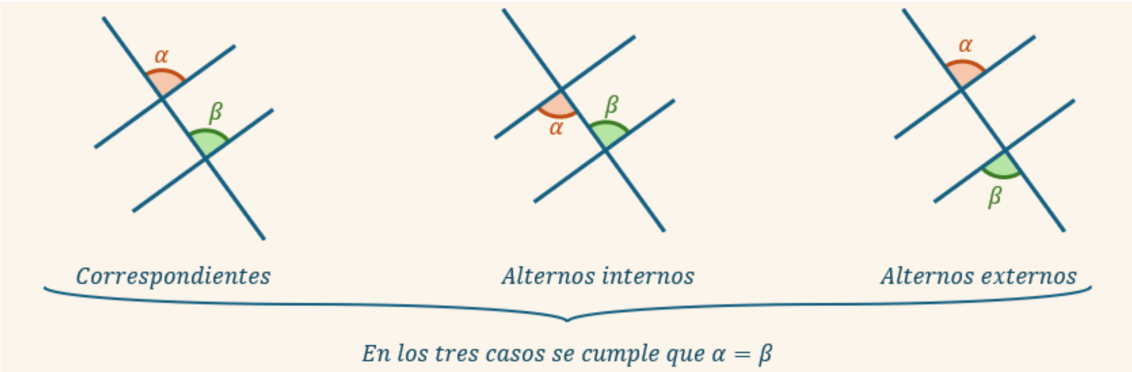
Según la suma de dos ángulos

- **Ángulos complementarios:** dos ángulos consecutivos son además complementarios si suman 90°.
- **Ángulos suplementarios**: suman 180° entre ellos. Deben ser adyacentes.

Según su intersección con paralelas

- **Ángulos correspondientes:** Están en la misma posición relativa en cada intersección.
- **Ángulos alternos internos:** Están dentro de las líneas paralelas y en lados opuestos de la transversal.

- **Ángulos alternos externos:** Están fuera de las líneas paralelas y en lados opuestos de la transversal.



Operaciones entre ángulos

Los ángulos no solo pueden medirse y clasificarse, sino también operarse.

Suma de ángulos

Si tenemos ángulos enteros, se realizan de forma directa:

$$72° + 37° = 109°$$

$$5° + 62° = 67°$$

Si tuviéramos también minutos (denotados con $'$) y segundos (denotados con $''$), hay que tener en cuenta que cada 60' se forma $1°$ y cada $60''$ se forma $1'$.

$$14°\,16'\,32'' + 11°\,53'\,40''$$

- Paso 1: calculamos los segundos.

$$32'' + 40'' = 72''$$

Como excede los $60''$ los restamos para obtener el resultado final. El minuto obtenido se sumará después.

$$72'' - 60'' = 12''$$

- Paso 2: calculamos los minutos.

$$16' + 53' + 1'$$

No debemos olvidar sumar el minuto excedente de haber calculado los segundos.

$$16' + 53' + 1' = 70'$$

Vuelve a haber excedente, por lo que restamos $60'$

$$70' - 60' = 10'$$

- Paso 3: calcular los grados.

$$14° + 11° + 1° = 26°$$

- Paso 4: expresar el resultado final:

$$26°\ 10'\ 12''$$

Resta de ángulos

La resta se realiza parte por parte al igual que la suma, solo que en esta ocasión, en lugar de tener excedente se puede presentar algún faltante.

$$23°\ 5'\ 53'' - 11°\ 9'\ 49''$$

- Paso 1: restar los segundos.

$$53'' - 49'' = 4''$$

- Paso 2: restar los minutos.

$$5' - 9'$$

En este caso no puedo restar, ya que el minuendo es menor que el sustraendo. Por lo cual debo utilizar un grado. Básicamente le “pedimos al compañero”, tal como hacemos en las restas tradicionales.

$$\begin{array}{r} \overset{22°}{\cancel{23}°}\ \overset{65'}{\cancel{5'}}\ 53'' \\ -\quad 11°\ 9'\ 49'' \\ \hline 56'\ 4'' \end{array}$$

$$23° - 1° = 22°$$

$$1° + 5' = 60' + 5' = 65'$$

Ahora sí podemos realizar la resta de los minutos.

$$65' - 9' = 56'$$

- Paso 3: restar los grados.

$$22° - 11° = 11°$$

Recordá que utilizamos un grado de los 23 para realizar la resta entre minutos, por lo que ahora, el primer término serán 22°

- Paso 4: expresar el resultado.

$$11°\ 56'\ 4''$$

Multiplicación por un Real

Los ángulos pueden ser multiplicados por números reales. Al hacerlo, hay que tener en cuenta que los minutos y segundos no excedan de 60. Por ejemplo:

$$g = 40°\ 21'\ 15'' \qquad 3.g = ?$$

- Paso 1: calcular los segundos.

$$15''.3 = 45''$$

- Paso 2: calcular los minutos.

$$21'.3 = 63' = 1°\,3'$$

- Paso 3: calcular los grados.

$$40°.3 = 120°$$

- Paso 4: expresar el resultado.

$$(120° + 1°)\;3'\;45''$$

$$121°\;3'\;45''$$

División por un Real

Así como se puede multiplicar también puede dividirse por un escalar. Ejemplo

$$\frac{37°\;23'\;20''}{4}$$

- Paso 1: dividir los grados.

$$\frac{37°}{4} = 9°. \mathit{Resto}\;1°$$

  Como queda resto, se convierte a minutos y se utiliza en la siguiente división.

- Paso 2: dividir los minutos.

$$\frac{(60' + 23')}{4} = \frac{83'}{4} = 20'. \mathit{Resto}\;3'.$$

  Al igual que en el paso anterior, el resto se transforma en segundos.

- Paso 3: dividir los segundos.

$$\frac{(180'' + 20'')}{4} = \frac{200''}{4} = 50''$$

- Paso 4: expresar el resultado.

$$9°\;20'\;50''$$

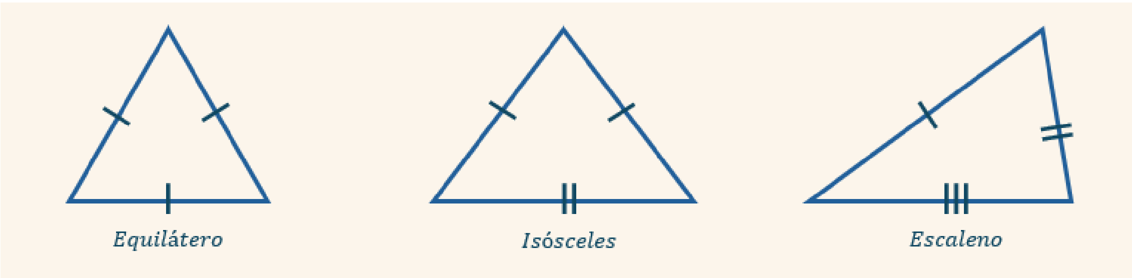
Esta no es la única forma de resolverlo, es solo una propuesta. También existen otras formas, como por ejemplo convertir todo a segundos, multiplicar y después convertirlo a grados nuevamente.

Triángulos

Un triángulo es una figura geométrica **plana** de **tres lados** y **tres ángulos internos**. En todo triángulo se cumple que la **suma de sus ángulos internos** siempre es de $180°$. Estos se pueden clasificar según sus **ángulos internos o sus lados.**

Clasificación según sus lados

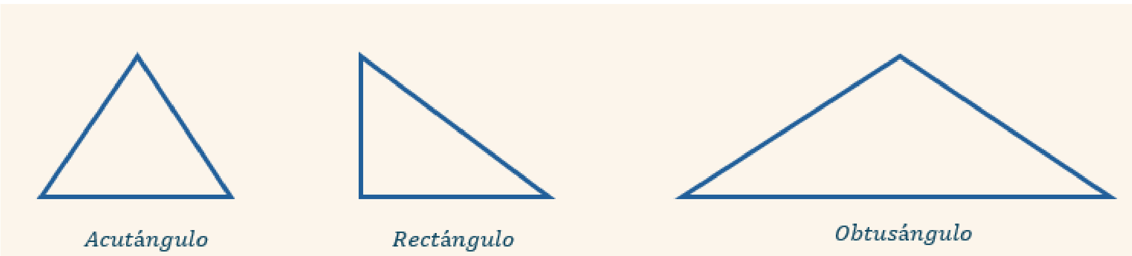
- **Equilátero:** todos los lados iguales.
- **Isósceles:** dos lados iguales.
- **Escaleno:** todos los lados son distintos.



Nota: cuando los lados tienen la misma cantidad de rayas intenta indicarse que son de igual longitud.

Clasificación según sus ángulos

- **Acutángulo:** los tres ángulos internos son menores a $90°$.
- **Rectángulo**: tiene un ángulo recto ($90°$).
- **Obtusángulo:** tiene un ángulo obtuso ($< 90°$).



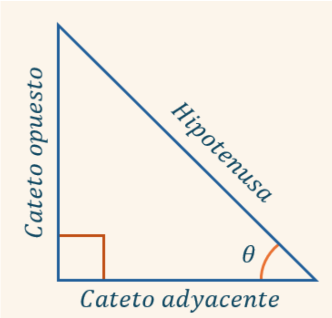
Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo

De todos los tipos de triángulos, el más frecuente a la hora de resolver problemas suele ser el triángulo rectángulo. En especial por las **relaciones entre sus lados y ángulos agudos**, las cuales se vuelven indispensable al afrontar las distintas situaciones problemáticas que competen al trabajo ingenieril.

¿Qué son las razones trigonométricas?

Como se menciona arriba, son relaciones entre lados y ángulos agudos de un triángulo rectángulo, permiten calcular los lados o ángulos por medio de información parcial.

Lados de un triángulo rectángulo



• **Hipotenusa:** es el lado opuesto al ángulo recto.
• **Cateto opuesto:** es el cateto opuesto al ángulo a medir (en este caso θ).
• **Cateto adyacente:** es el lado que forma el ángulo θ con la hipotenusa.

Las relaciones entre ángulos y lados quedan dadas por las **razones trigonométricas $\sin \alpha$ (o $sen(\alpha)$), $\cos \alpha$ y $\tan \alpha$ (o $tg(\alpha)$).**

- El seno del ángulo es igual al cateto opuesto sobre la hipotenusa.
- El coseno del ángulo es igual al cateto adyacente sobre la hipotenusa.
- La tangente del ángulo es igual al cateto opuesto sobre el adyacente.

Para recordar esto de forma más fácil, podes utilizar el acrónimo **SOHCAHTOA.**

Seno
Opuesto
Hipotenusa

$$\sin(\theta) = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

Coseno
Adyacente
Hipotenusa

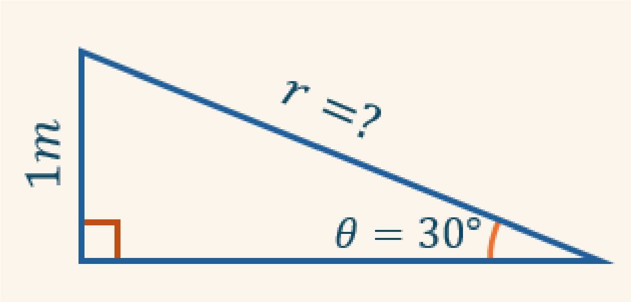
$$\cos(\theta) = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

Tangente
Opuesto
Adyacente

$$\mathrm{tg}(\theta) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

Vayamos ahora a un ejemplo. Se desea conocer la longitud de una rampa la cual tiene un ángulo de inclinación de 30° y alcanza una altura de 1 metro.

Lo primero que hacemos en estos casos es graficar rápidamente para poder visualizar el problema:



De esta forma, es fácil notar que los datos que tenemos son el ángulo y su lado opuesto. Con esto en mente, nos alcanza con saber qué razón relaciona el lado opuesto y el ángulo con la hipotenusa, es decir, el seno.

$$\sin(\theta) = \frac{c.\ opuesto}{hipotenusa}$$

Reemplazando en la expresión los datos que tenemos:

$$\sin(30°) = \frac{1m}{r}$$

Ahora debemos calcular el seno de 30 grados y despejar r (la hipotenusa, pero en nuestro problema representa la rampa) y encontraremos la longitud deseada. $\sin(30°) = 0{,}5$, entonces:

$$0{,}5 = \frac{1m}{r}$$

$$0{,}5r = 1m$$

$$r = \frac{1}{0{,}5}m$$

$$r = 2m$$

La longitud de la rampa es de 2 metros.

Razones inversas

Hasta este punto, hemos visto que varias operaciones y sus inversas, para la suma está la resta, para la multiplicación está la división, para la potencia existe la raíz. Con las razones trigonométricas pasa lo mismo.

- Para el seno está la cosecante ($\csc(\theta)$ $o\ cosec(\theta)$)

$$cosec(\theta) = \frac{hipotenusa}{C.\ Opuesto}$$

- Para el coseno está la secante ($\sec(\theta)$)

$$\sec(\theta) = \frac{hipotenusa}{C.\ Adyacente}$$

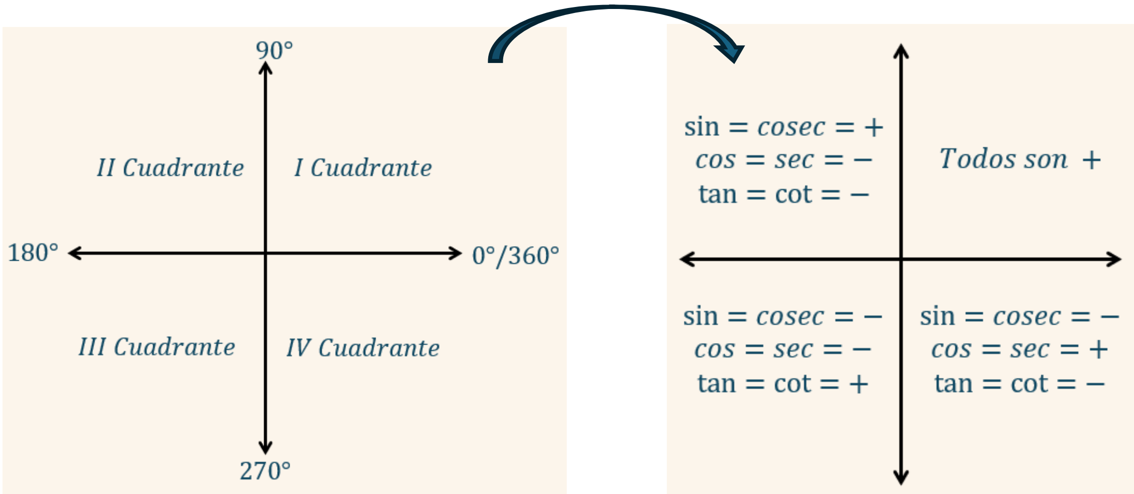
- Para la tangente está la cotangente ($\cot(\theta)$ $o\ ctg(\theta)$)

$$\cot(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{C.\ Adyacente}{C. Opuesto}$$

¿Dónde estamos parados? Los cuadrantes

En trigonometría al trabajar con funciones trigonométricas extendidas más allá del triángulo rectángulo, es fundamental saber en qué cuadrante se encuentra el ángulo, ya que estos definen el signo del resultado, y sin tenerlo en consideración no podremos interpretar correctamente el resultado.

El plano cartesiano se divide en cuatro cuadrantes, numerados en sentido antihorario. En cada cuadrante, los signos de las razones varían:



Son especialmente útiles para simplificar cálculos si los utilizamos en conjunto con los ***ángulos de referencia***.

Ángulos de referencia

Cuando trabajamos con ángulos fuera de los comprendidos en triángulos rectángulos, existen operaciones que podemos aplicar para llevarlos nuevamente a los conocidos (de 0° a 90°), las cuales se basan en utilizar ángulos de referencia. Supongamos que tenemos un ángulo θ.

- Si $90° < \theta < 180°$, el ángulo de referencia será $\theta_{ref} = 180° - \theta$.
- Si $180° < \theta < 270°$, el ángulo de referencia será $\theta_{ref} = \theta - 180°$.
- Si $270° < \theta < 360°$, el ángulo de referencia será $\theta_{ref} = 360° - \theta$.

Supongamos por ejemplo que debemos calcular $\sin(150°)$.

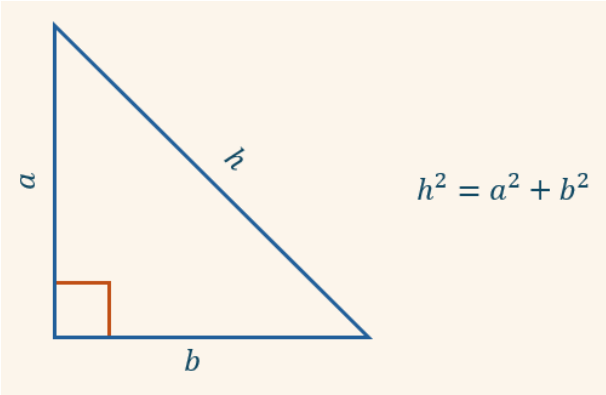
Para llevarlo a un cálculo más simple, podemos tomar su ángulo de referencia. Sabemos que $150°$ caen en el segundo cuadrante ya que está entre $90°$ y $180°$, por lo cual su ángulo de referencia será $180° - 150° = 30°$. Entonces:

$$\sin(150°) = \sin(30°) = 0{,}5$$

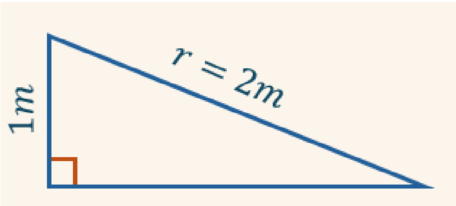
Teorema de Pitágoras

Ya hablamos de las razones trigonométricas y cómo relacionan los ángulos de un triángulo con sus distintos lados. Pero también existen correspondencias entre los lados, descriptas por el ***Teorema de Pitágoras***.

La idea es simple, el filósofo y matemático Pitágoras descubrió que los lados de un triángulo rectángulo guardan cierta relación entre sí. Para ser más específicos, el Teorema de Pitágoras establece que la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los dos catetos elevados al cuadrado. Los **catetos** son los **lados de un triángulo** rectángulo **que forman el ángulo de 90°**.



Esto nos permite obtener la longitud de los lados a partir de información parcial. Tomemos por ejemplo el caso de la rampa que trabajamos más arriba.



Ya sabemos que la rampa tiene una longitud de 2 metros, y conocíamos de antemano que el alto de esta era de 1 metro. ¿Cuánto mide el tercer lado? Conociendo la fórmula de Pitágoras, podemos reemplazar los lados del triángulo y despejar para obtener el tercero.

$$h^2 = a^2 + b^2$$

En este caso conocemos la hipotenusa h y conocemos uno de los lados (podemos reemplazar en cualquiera de los dos a o b, es indiferente).

$$(2m)^2 = (1m)^2 + b^2$$

$$4m^2 = 1m^2 + b^2$$

$$4m^2 - 1m^2 = b^2$$

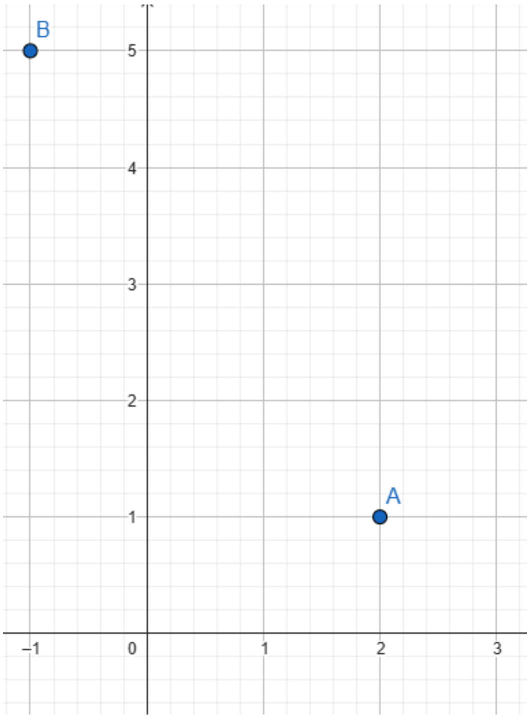
$$\sqrt{3m^2} = b$$

$$b \approx 1{,}73m$$

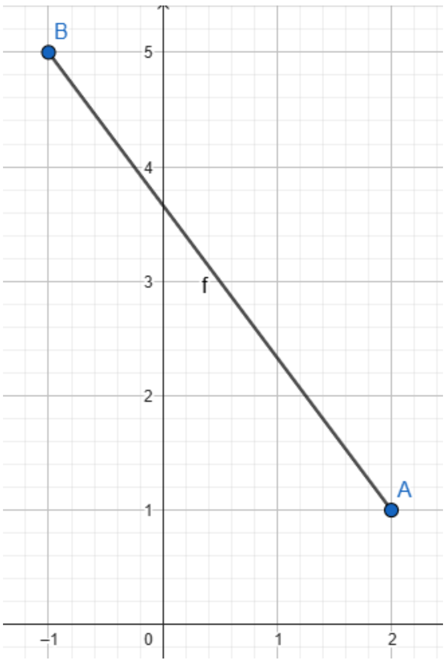
Cuando resolvemos un problema real, no hay que olvidar respetar las unidades. Si en el problema buscamos una distancia, la solución no puede ser en litros.

Distancia entre puntos

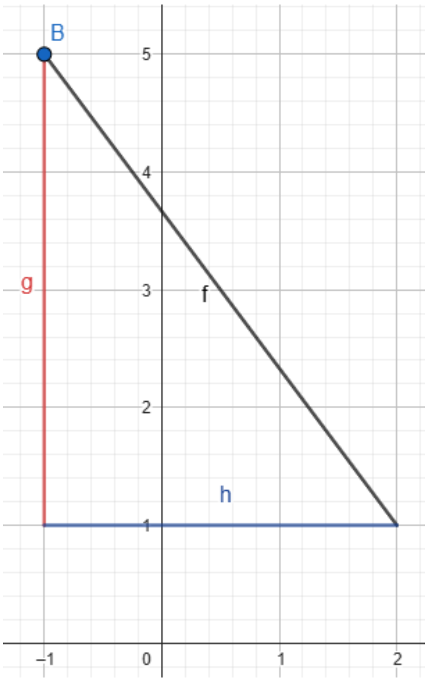
Una de las aplicaciones del Teorema de Pitágoras es poder hallar la distancia entre dos puntos de un plano. Por ejemplo, supongamos que queremos hallar la distancia entre A y B.



La distancia entre estos dos puntos no es más que el segmento (porción de recta) que los une:



Si observamos, podríamos tratar al segmento que va del punto $B(-1;5)$ al punto $A(2;1)$ como la hipotenusa de un triángulo rectángulo. A modo de ayuda, diagramemos esta idea en el plano:



El primer cateto es el lado g y el segundo es el lado h. Entonces la longitud de lado f quedará dado por

$$f^2 = g^2 + h^2$$

Ahora solo debemos calcular g y h. Esto podemos calcularlo simplemente haciendo la resta del punto final menos el punto inicial.

$Lado\ g$: Comienza en $y = 1$ y termina en $y = 5$, por lo que su longitud es $\Delta y = y - y_0$

$$g = 5 - 1$$

$Lado\ h$: Comienza en $x = -1$ y termina en $x = 2$, su longitud será $\Delta x = x - x_0$

$$h = -1 - 2$$

A tener en cuenta:

- *Δ es un símbolo matemático que se usa para indicar una variación.*
- *Por lo general utilizamos el subíndice 0 para indicar un valor inicial de una variable (cómo hicimos en x_0 e y_0).*

Entonces, ahora que ya conocemos la longitud de ambos catetos, ya podemos calcular la distancia f

$$f^2 = (-1-2)^2 + (5-1)^2$$

$$f^2 = (-3)^2 + 4^2$$

$$f^2 = 9 + 16$$

$$f = \sqrt{25}$$

$$f = 5$$

La distancia entre los puntos es de 5 unidades.

Identidades trigonométricas

Las identidades trigonométricas son igualdades que se cumplen para todos los valores del ángulo. Las mismas nos permiten, en muchas ocasiones, simplificar expresiones complejas de resolver.

Identidad Pitagórica

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

De esta se derivan otras dos:

$$1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta)$$

$$1 + \cot^2(\theta) = \csc^2(\theta)$$

Otras identidades

- $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$
- $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$
- $\tan(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}$
- $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}}$
- $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}}$
- $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}}$
- $\sin(\alpha).\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$
- $\cos(\alpha).\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$
- $\sin(\alpha).\sin(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$

Sumas y restas de ángulos

- $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha).\cos(\beta) + \cos(\alpha).\sin(\beta)$

- $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha).\cos(\beta) - \cos(\alpha).\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha).\cos(\beta) - \sin(\alpha).\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha).\cos(\beta) + \sin(\alpha).\sin(\beta)$
- $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha).\tan(\beta)}$
- $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha).\tan(\beta)}$

¿Qué pasa si no son rectángulos?

Hasta ahora venimos hablando del caso ideal donde todo triángulo que trabajamos es un rectángulo. ¿Pero qué pasa cuando no tienen un ángulo recto? En estos casos, las razones trigonométricas básicas no son suficientes, sino que utilizamos dos leyes que permiten relacionar lados y ángulos de manera general: ***la ley de los senos y la ley de los cosenos***.

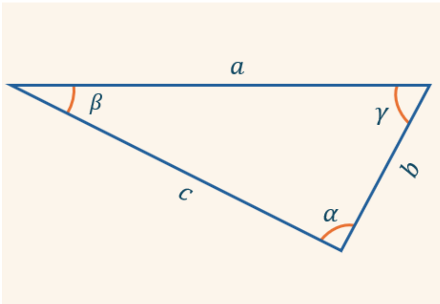
Ley de los senos

La ley de los senos establece que en cualquier triángulo se cumple que:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Donde:

- a, b, c son los lados del triángulo.
- α, β, γ son los ángulos opuestos a esos lados.



Se utiliza al conocer dos lados y un ángulo o dos ángulos y un lado.

Ejemplo:

$a = 10 \qquad \alpha = 30° \qquad \beta = 45°$

Podemos calcular el valor de b reemplazando en la ecuación de la ley de senos:

$$\frac{10}{\sin(30°)} = \frac{b}{\sin(45°)}$$

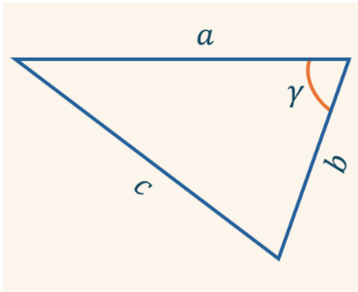
$$b = 10.\frac{\sin(45°)}{\sin(30°)} \rightarrow b \approx 14{,}14$$

Ley de los cosenos

La **ley de los cosenos** generaliza el Teorema de Pitágoras para cualquier triángulo:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Donde:



- a, b y c son los lados del triángulo.
- γ es el ángulo opuesto al lado c.

Se utiliza cuando se conocen dos lados y un ángulo o cuando se conocen los tres lados y se quiere calcular el ángulo.

Por ejemplo:

$a = 5$ $\qquad$ $b = 7$ $\qquad$ $\gamma = 60°$

Se puede calcular c con:

$$c^2 = 5^2 + 7^2 - 2.5.7.\cos(60°)$$

$$c^2 = 25 + 49 - 70 \cdot 0{,}5$$

$$c^2 = 74 - 35$$

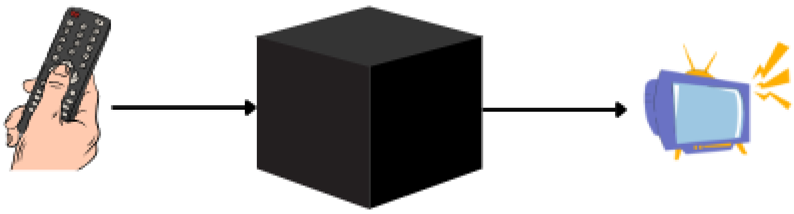
$$c^2 = 39$$

$$c = \sqrt{39} \rightarrow c \approx 6{,}24$$

Funciones y Representación

En lo cotidiano, usamos constantemente dispositivos sin conocer en detalle cómo funcionan. Apretamos un botón en el control remoto y el televisor se enciende, deslizamos el dedo por el celular y se desbloquea, o giramos una perilla en la pava eléctrica y, como por arte

de magia, la pava calienta el agua y se detiene en el momento justo.



Sabemos que, ante una acción determinada, obtenemos una respuesta. No necesitamos saber qué sucede adentro del dispositivo: nos basta con confiar en que funciona. Esta idea se conoce como modelo de caja negra, y nos será útil para comenzar a explorar el concepto de función.

¿Qué es una función?

Matemáticamente, una **función** es una relación entre dos conjuntos: **a cada valor de entrada** (llamado ***variable independiente***) le corresponde un **único valor de salida** (llamado ***variable dependiente***).

Formalmente, una función es una regla que asigna a cada elemento de $\boldsymbol{x}$ de un conjunto $\boldsymbol{D}$ (al cual llamaremos ***dominio***) un único elemento $\boldsymbol{y}$ de un conjunto $\boldsymbol{B}$ (conocido como ***codominio***). A este elemento $\boldsymbol{y}$ se lo llama **imagen** de $\boldsymbol{x}$, y se lo escribe como:

$$f(x) = y$$

Básicamente lo que nos dice, es que si a la variable independiente $\boldsymbol{x}$ le aplicamos la función $\boldsymbol{f}$ nos da como resultado el valor $\boldsymbol{y}$. Aclaración, estas letras son el estándar, es la notación más tradicional, pero pueden ser reemplazadas por cualquier otra letra y expresan lo mismo.

$$g(z) = w$$

$$v(t) = n$$

En estos casos:

- g y v serían la función (reemplazan a f).
- z y t serían las variables independientes (originalmente x).
- w y n serían las variables dependientes (tradicionalmente y).

Ejemplos de funciones

Una función que calcula el doble de un número:

$$f(x) = 2x$$

Si reemplazamos x por cualquier número, se verá duplicado en el resultado. Para indicarlo lo escribimos de la siguiente forma:

$$f(1) = 2 \,.\, 1 = 2 \rightarrow \text{“}f \textit{ evaluada en 1 es igual a 2”}$$

Este proceso donde asignamos distintos valores a x frecuentemente se lo menciona como ***evaluar la función***.

Dominio, codominio e imagen

- **Dominio**: es el conjunto de valores que puede tomar x. Por ejemplo, en la función $\frac{1}{x}$, x no puede ser 0 ya que no se puede dividir por 0. Entonces el dominio es $D: \mathbb{R} - \{0\}$ (“*todos los reales menos el 0*”).
- **Codominio:** conjunto de todos los posibles resultados que podrían salir, aunque no se usen.
- **Imagen:** conjunto de valores que efectivamente se obtienen al aplicar la función al dominio. Para x^2, el dominio son todos los reales ya que cualquier x puede ser elevado al cuadrado. Pero la imagen serán solo los reales positivos ya que no existen números reales que multiplicados por si mismos den como resultado un número negativo.

Estos últimos dos suelen confundirse a menudo ya que muchas veces coinciden. Veamos un ejemplo que permita distinguirlos.

Codominio vs Imagen

Si tuviéramos un sensor que registre la temperatura ambiente por cada hora que pasa, y la función $T(h)$, devuelve la temperatura medida a la hora h del día.

Dominio: son todas las horas del día donde se puede medir temperatura. Podemos expresarlo como $h \in [0{,}24)$ (las 24 hs del día).

Codominio: son los valores posibles para una temperatura. En este caso son todos los reales $Cod: \mathbb{R}$.

Imagen: son los valores efectivamente medidos ese día. Supongamos que el mínimo de temperatura fue 8 y el máximo 27. $Imagen = [8; 27]$

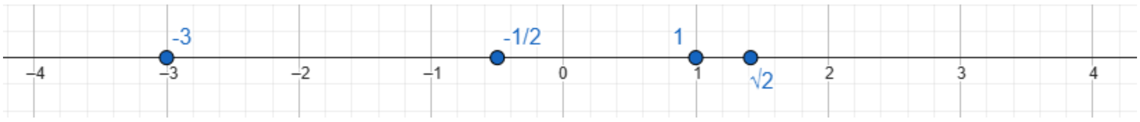
Representación gráfica

¿Qué pasaría si queremos representar nuestra función temperatura? Hasta ahora, para representar gráficamente los números utilizábamos la recta. Teniendo un número, podíamos ubicarlo a lo largo de la línea, en base a su distancia con el 0.

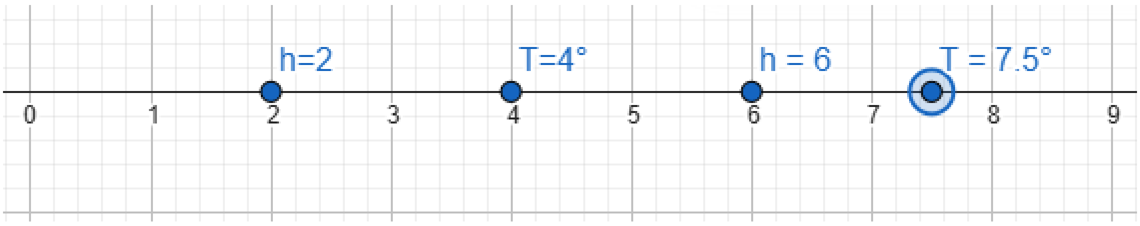
Por ejemplo:

$x_1 = -3$ $\qquad x_2 = -\frac{1}{2}$ $\qquad x_3 = 1$ $\qquad x_4 = \sqrt{2}$

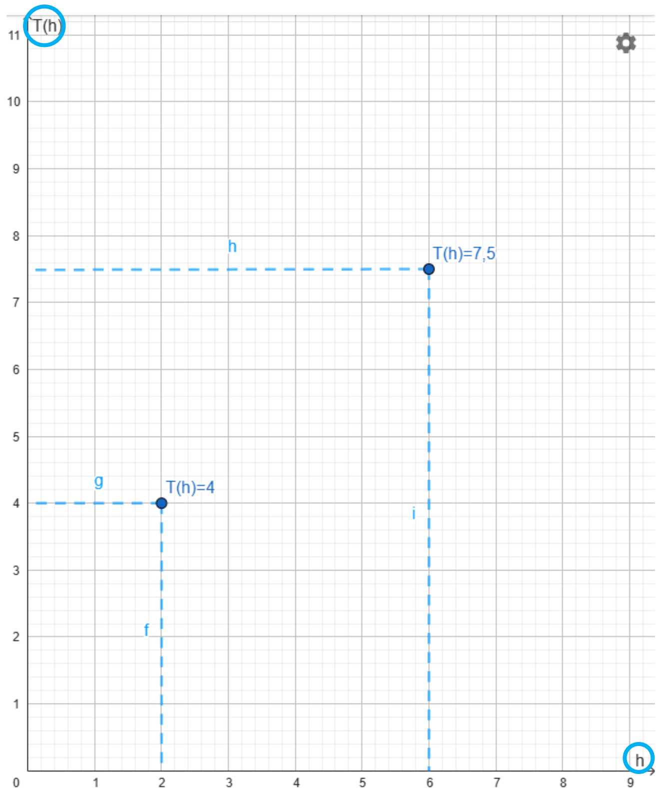
Nota: el subíndice (pequeño número a la derecha y debajo de cada variable) de las variables es solo para denotar que son distintos puntos. Vas a encontrar esta notación muy seguido.



Pero ¿Qué pasa ahora que tenemos dos valores? Uno correspondiente a la variable, el cuál puede continuar representándose en la recta, pero ahora también tenemos el valor de la función. Continuando el ejemplo anterior, si a las 2 am se registraron 4° y a las 6 am se registraron 7.5°, podríamos representar los cuatro puntos en la recta:



Pero de esta forma, no conocemos que temperatura corresponde a que hora del día. Nos falta una información más, la relación entre cada punto. Por estas cuestiones, a la hora de representar dos variables distintas, utilizamos dos ejes, el **eje de las abscisas**, en el cual se marcan los valores de la **variable independiente** (*comúnmente* x); y el **eje de las ordenadas**, en el cuál se marcan los valores de la **variable dependiente** (*comúnmente* y).



Ahora sí, con el gráfico podemos observar que a las 2 hs del día, la temperatura fue de 4°, y a las 6 am era de 7,5°.

Prestá especial atención a los extremos de los ejes. Si te fijas, están etiquetados con la variable que representan, el eje horizontal tiene una h, ya que representa las horas del día, y el vertical tiene escrito T(h), ya que representa la temperatura a cada hora (nuestra función).

Ahora, al representar una función, ya no hablamos de una recta numérica porque ya no representamos un único valor, sino que representamos un **par ordenado**.

- En forma general se representa (x, y), donde x es la variable independiente e y la dependiente.
- Se dice que es ordenado ya que no es lo mismo cual de los valores ocupa el primer lugar. Aplicado a nuestro problema:
    - $(2; 4)$: representa que a las 2 am, la temperatura fue de 4°, pero si lo invertimos.
    - $(4; 2)$: nos dice que a las 4 am, la temperatura fue de 2°. ¿Ves cómo da información distinta si no respetamos el orden?

Esta combinación de dos rectas, una vertical y una horizontal es conocida como **plano cartesiano**.

Tipos de funciones

En ingeniería, es normal describir cada problema que tenemos en forma de una función matemática, cada una particular del caso que refleja. Sin embargo, a medida que avanzamos van apareciendo problemas que tienen similitudes entre sí, dando lugar a la posibilidad de que una misma función refleje el comportamiento de distintas situaciones problemáticas y solo haya que cambiar la variable que estamos analizando. A lo largo de este seminario de ingreso estudiaremos puntualmente tres tipos de funciones: **lineales, trigonométricas y cuadráticas**.

Función Lineal

Representan problemas donde la función varía de forma uniforme respecto de la variable independiente. Un ejemplo muy común es cuando compramos algo, sabemos que un paquete de yerba está $2000, si compramos dos gastamos $4000, si compramos ocho gastamos $16000, y así podríamos seguir.

Entonces, si quisiéramos describir matemáticamente el costo total de la yerba que compramos, tendríamos algo así:

$$C(q) = p.q$$

Donde:

- $C(q)$: es el costo total en función de la cantidad de productos comprados.
- q: es la cantidad de productos comprados.
- p: es el precio del producto que estamos comprando.

Reemplacemos los valores de la función por lo que hablamos más arriba para comprobar si representa o no nuestro problema:

- Caso 1: comprar un paquete.

$$C(1) = \$2000.1 \rightarrow C(1) = \$2000$$

- Caso 2: comprar dos paquetes.

$$C(2) = \$2000.2 \rightarrow C(2) = \$4000$$

- Caso 3: comprar ocho paquetes.

$$C(8) = \$2000.8 \rightarrow C(8) = \$16000$$

Efectivamente, ahora siempre que queramos calcular cuánto vamos a gastar, simplemente reemplazamos q por la cantidad de paquetes que queremos comprar y conocemos el costo final.

Observando con detenimiento la función, podemos notar que siempre varía de a $\$2000$. Esta es justamente la variación uniforme que se menciona un poco más arriba. No importa cuantos paquetes compremos, el precio no cambia. La variable p, la cual representa el cambio, es la **pendiente de la función**.

Toda función lineal tiene una pendiente, que es básicamente la tasa a la que la función varía respecto de q. Siempre que q aumente, $C(q)$ aumentara p veces.

Vayamos a otro problema:

Supongamos que queremos trasladarnos de un punto a otro de la ciudad y para lograrlo nos pedimos un taxi. Suponiendo que por cada kilómetro recorrido debemos pagar $1200, si recorremos 6 km pagaríamos $7200.

Hasta ahora, el problema se ve muy similar al anterior. Pero los taxis tienen una segunda tarifa, que es la bajada de línea (*precio que se cobra por frenar el auto y subir*). Este siempre es fijo, podríamos a efectos prácticos, decir que esta es de $800. Nuestro valor final entonces es de $8000.

Tratando de describir la función de la misma forma que hicimos con el costo de la yerba:

$$T(d) = p.d$$

$$T(d) = \$1200\ .d$$

Donde:

- $T(d)$: es el total del viaje en función de la distancia recorrida.
- d: es la distancia recorrida en km.
- p: es el precio de cada kilómetro recorrido (nuestra pendiente en este problema).

Pero ahora, si reemplazamos por los 6 km que queremos recorrer, nos queda que gastaremos $7200. La función aún no termina de representar nuestro problema, ya que no refleja la bajada de línea.

Pensemos que pasa para otros casos distintos de los 6 km:

- Si recorremos 4km, gastaremos $4800 más los $800 por la bajada de línea.
- Si recorremos 2km, gastaremos $2400 más los $800 por la bajada de línea.
- Si recorremos 10km, gastaremos $12000 más los $800 por la bajada de línea.

Entonces, la bajada de línea no cambia, es un valor **constante** (*no cambia*) para cualquier recorrido que **se le suma** al precio total. Con esto en mente, podemos plantear nuestra función cómo:

$$T(d) = p.d + b$$

Donde b es la bajada de línea:

$$T(d) = \$1200.d + \$800$$

Este último término es conocido como **ordenada al origen** (o.o.) y nos indica una suerte de "*valor inicial*" para nuestra función, donde si nuestra variable independiente es cero, el valor de la función será el de la o.o.

En el caso de la yerba, si no compramos yerba, no gastamos nada:

$$C(0) = \$2000.0 \to C(0) = 0$$

En el caso del taxi, si no recorremos ni un km, aún así debemos pagar mínimamente la bajada de línea:

$$T(0) = \$1200.0 + \$800 \to T(0) = \$800$$

Resumiendo...

Las funciones lineales son aquellas que presentan una variación uniforme (de ahí que se llamen "*lineales*"), la cual se encuentra descripta por la pendiente de la misma. En forma general:

$$y = f(x) = mx + b$$

- $y = f(x)$: la variable dependiente y se calcula con base en una función de x.
- x: variable independiente.
- m: pendiente. Tasa a la que varía y.
- b: ordenada al origen. También nos indica el punto de corte en el eje y.

Gráficamente

Intentemos graficar una función más simple. Vamos a intentar con $f(x) = 2x + 1$. Para poder lograrlo, la forma más común de resolverlo es plantear una **tabla de valores**. Esta consiste en elegir valores arbitrarios para x y reemplazarlos en la función para ver cuánto vale.

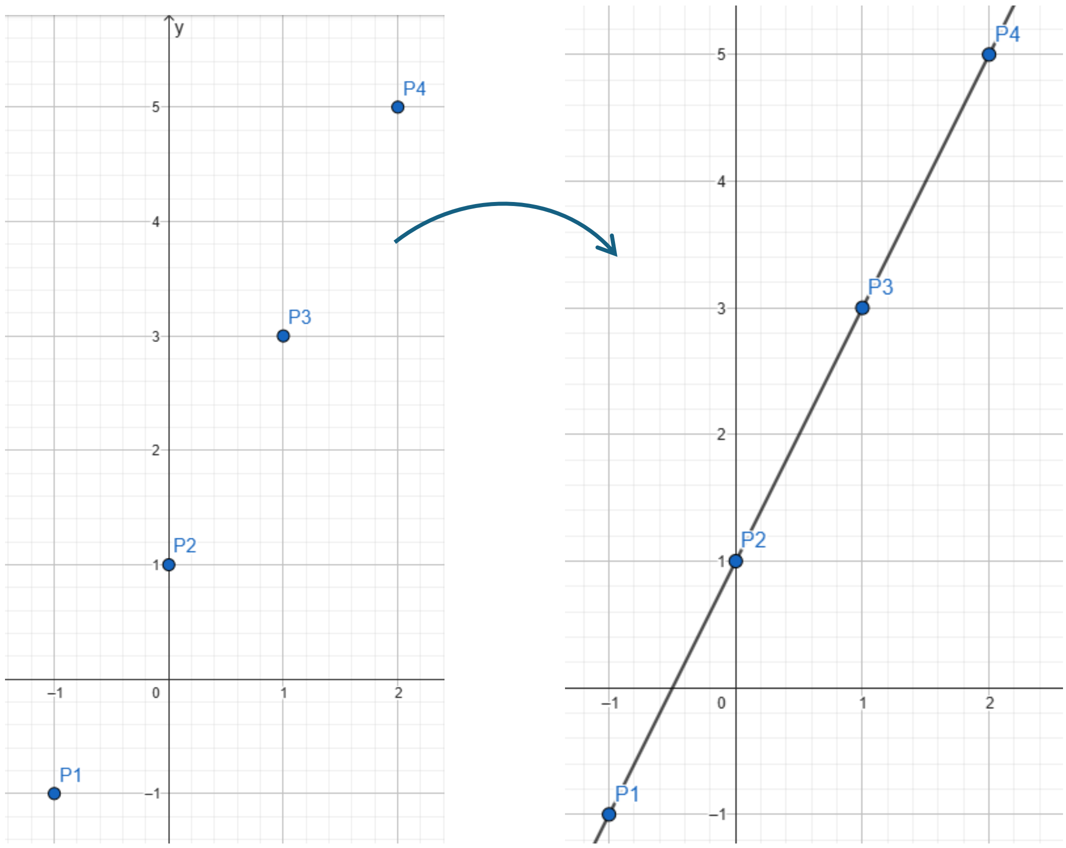
x	$f(x)$
-1	$f(-1) = 2.(-1) + 1 \to f(-1) = -2 + 1 \to f(-1) = -1$
0	$f(0) = 2.0 + 1 \to f(0) = 0 + 1 \to f(0) = 1$
1	$f(1) = 2.1 + 1 \to f(1) = 2 + 1 \to f(1) = 3$
2	$f(2) = 2.2 + 1 \to f(2) = 4 + 1 \to f(2) = 5$

Ahora, tomamos los pares $(x; f(x))$ y los marcamos en el

. Debemos marcar:

$P_1: (-1; -1)$ $P_2: (0; 1)$ $P_3: (1; 3)$ $P_4: (2; 5)$

Una vez graficados los puntos, los unimos con una línea y nos queda la recta ya graficada



Función a partir de puntos y pendientes

Muchas veces, no conocemos directamente la expresión algebraica de una función, pero sí tenemos información clave, como un punto por donde pasa la recta o la pendiente que tiene. A partir de estos datos, es posible reconstruir la función

Ecuación Punto-Pendiente

Si se conoce un punto (x_0, y_0) por el que pasa la recta, y su pendiente m, podemos usar la **ecuación punto-pendiente**:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Donde x_1 e y_1 son las coordenadas de un punto conocido en el plano.

Supongamos que tenemos una recta que pasa por el punto $(2; 3)$ y tiene pendiente $m = 4$. Si quisiéramos obtener la ecuación que define a la recta, simplemente debemos reemplazar los datos obtenidos en la expresión anterior:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = 4(x - 2)$$

Ahora despejamos la ecuación para llevarla a la forma $y = mx + b$, para esto, aplicamos los conceptos de ecuaciones trabajados en el módulo I.

$$y - 3 + 3 = 4x - 4.2 + 3$$

$$y = 4x - 8 + 3$$

$$y = 4x - 5$$

Ecuación de la recta conociendo dos puntos

Si se diera el caso donde la pendiente también es desconocida, pero conocemos dos puntos cualesquiera, aun así, podríamos ser capaces de recuperar la función. La ecuación de la pendiente queda dada por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Donde x_1 e y_1 son las coordenadas de un primero punto y x_2 e y_2 las coordenadas del segundo. Para poder resolver un problema donde se conocen solo dos puntos, primero debemos calcular la pendiente utilizando la fórmula expresada arriba y luego reemplazar en la ecuación punto-pendiente.

Teniendo dos puntos $(1;2)$ y $(4;5)$ podemos obtener la ecuación de la recta:

1. Calculando la pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow m = \frac{5 - 2}{4 - 1} = \frac{3}{3} = 1$$

2. Usar uno de los puntos conocidos (cualquiera sirve) y reemplazarlo en la ecuación punto pendiente junto con la pendiente calculada:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

En este caso vamos a tomar el punto $(1;2)$:

$$y - 2 = 1(x - 1) \rightarrow y = x - 1 + 2 \rightarrow y = x + 1$$

Encontrando el punto medio

Cuando trabajamos con funciones lineales, muchas veces necesitamos analizar la relación entre dos puntos del plano. Ya vimos cómo usar dos puntos para encontrar la ecuación de una recta. Ahora vamos a aprender a encontrar el punto medio entre ellos.

¿Qué es el punto medio?

Imaginá que tenés dos puntos en el plano, por ejemplo:

$$A(2{,}5) \text{ y } B(6{,}1)$$

El punto medio entre A y B es el punto que se encuentra exactamente en el centro del segmento que los une. Es decir, está a la misma distancia de ambos puntos.

¿Cómo se calcula?

Para encontrar el punto medio, se promedia cada coordenada:

$$P_{medio} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

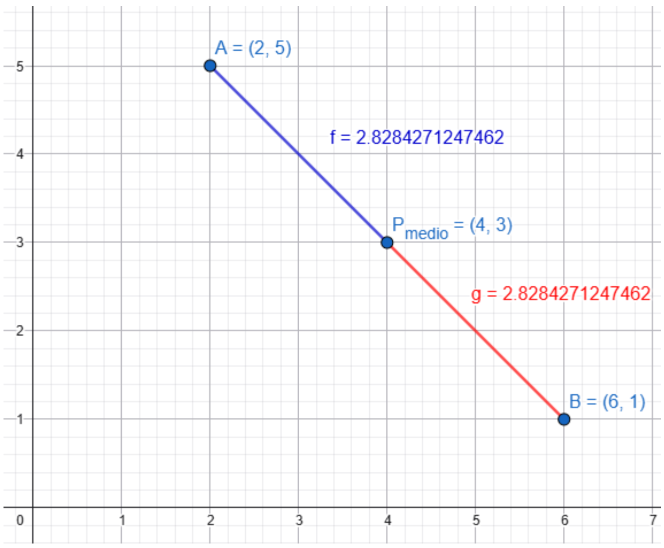
En este caso, tendríamos que reemplazar x_1 e y_1 por las coordenadas x e y del primer punto y x_2 e y_2 por las del segundo. Nos quedaría entonces:

$$P_{medio} = \left(\frac{2 + 6}{2}; \frac{5 + 1}{2}\right)$$

$$P_{medio} = \left(\frac{8}{2}; \frac{6}{2}\right)$$

$$P_{medio} = (4; 3)$$

Utilizando la herramienta GeoGebra, podemos ver como la distancia de A al punto medio es exactamente igual a la distancia de B al punto medio.



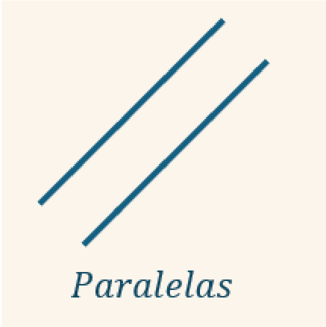
Relaciones entre rectas. Paralelas y Perpendiculares.

Hasta ahora trabajamos con funciones lineales, entendiendo cómo se representan, cómo se construyen a partir de puntos y pendientes, y cómo se grafican. Ahora vamos a detenernos a observar cómo se relacionan distintas rectas entre sí en el plano.

Si nos dispusiéramos a dibujar varias rectas sobre una hoja, notaremos que algunas parecen seguir caminos similares, otras se cruzan formando ángulos rectos, y otras simplemente se intersecan sin ningún patrón evidente. ¿Cómo podemos describir estas relaciones de manera matemática?

Rectas paralelas.

Tomando como ejemplo las rectas que toman caminos similares, si llegaran a tener la misma inclinación y pudiéramos continuarlas al infinito veríamos que jamás se cortan. Estas rectas son conocidas como ***rectas paralelas*** (se denota con el símbolo ∥), son aquellas que por mucho que se extiendan no tienen puntos en común, tal y como se ve en la imagen de la derecha.



Estas rectas, matemáticamente hablando tienen la misma pendiente $\boldsymbol{m}$.

Por ejemplo, si graficamos las rectas

- $y = 7x + 3$
- $y = 7x$
- $y = 7x - 2$

Veremos que nunca se cortan sin importar cuanto se extiendan.

En ocasiones, es posible que conozcamos una recta y que necesitemos hallar otra paralela que pase por un punto determinado. Por ejemplo:

Hallar la recta paralela a la recta $y = 2x - 3$ que pase por el punto $(-1; 3)$.

Para esto podemos utilizar la ecuación punto-pendiente que vimos anteriormente.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Donde y_1 y x_1 con las coordenadas 3 y -1 respectivamente. Lo único que nos falta conocer es la pendiente, que como nos dice que debe ser paralela a la recta $y = 2x - 3$ sabemos que tendrá la misma pendiente.

Si recordamos, la pendiente de una recta quedaba indicada por la variable m que era el término que acompañaba a la x. Por lo cual, en este caso, al observar que el número que acompaña a la x es 2, sabemos que nuestra pendiente será 2.

Entonces, la ecuación de la recta paralela a $y = 2x - 3$ que pasa por el punto será:

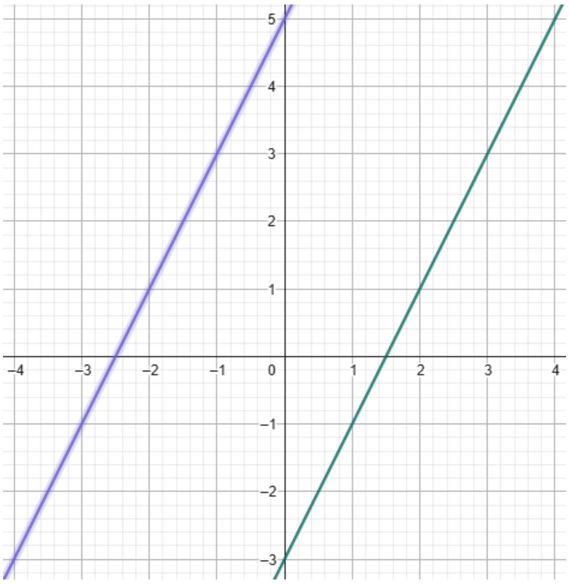
$$y - 3 = 2(x - (-1))$$

$$y - 3 = 2(x + 1)$$

$$y - 3 = 2x + 2 \cdot 1$$

$$y - 3 + 3 = 2x + 2 + 3$$

$$y = 2x + 5$$



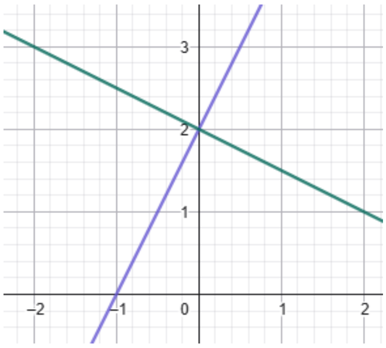
Rectas perpendiculares

Si las rectas llegaran a cortarse, existe un caso particular donde se cortan a 90° exactos. Cuando dos rectas se cortan en este ángulo se dice que son **perpendiculares** (se denota con el símbolo ⊥). Podemos observarlas analíticamente (es decir, con números) cuando las pendientes de dos rectas son ***opuestas e inversas***.

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

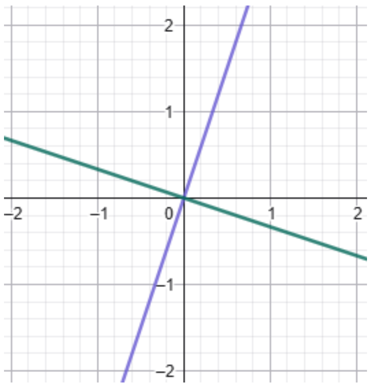
Veamos algunos ejemplos:

- Una recta perpendicular a $y = 2x + 2$ podría ser $y = -\frac{1}{2}x + 2$.



Si miramos con atención, vemos como la pendiente de la primera recta vale 2 mientras que, en la segunda, el 2 es negativo y está dividiendo (es decir, la pendiente es un medio de x negativo $\left(-\frac{1}{2}x\right)$).

- Una posible recta perpendicular a $y = -\frac{1}{3}x$ podría ser $y = 3x$.



Decimos “podría ser $y = 3x$” ya que no es la única opción. Cualquier recta cuya pendiente sea inversa y opuesta a la original será perpendicular a la misma. Por lo que podríamos cambiar infinitamente la ordenada al origen que seguiría siendo perpendicular si no cambiamos m. Lo mismo pasa con las paralelas que vimos anteriormente, existen infinitas opciones.

La situación cambia si necesitamos que pase por un punto específico. Si tuviéramos que calcular la ecuación de la recta perpendicular a $y = -\frac{1}{3}x$ y que pase por el punto $(1; 3)$ ahí si nos va a dar una única solución; la cual podemos obtener utilizando nuevamente la ecuación punto-pendiente.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = m(x - 1)$$

Reemplazando m por 3 (ya que debe ser inversa y opuesta a $-\frac{1}{3}$) nos queda:

$$y - 3 = 3 \cdot (x - 1)$$

$$y - 3 = 3x - 3$$

$$y = 3x$$

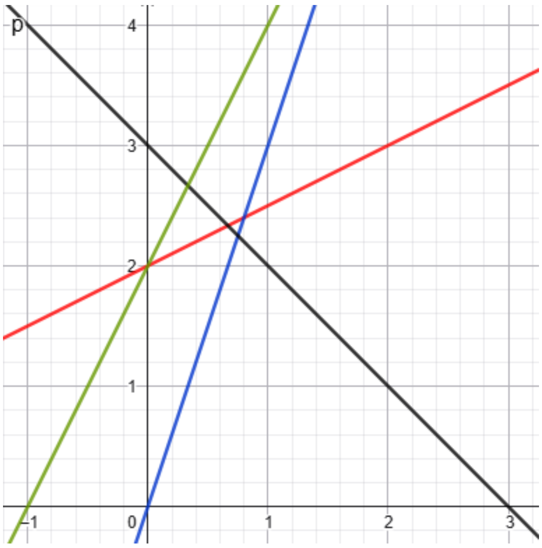
Ahora sí, obtuvimos una única solución posible.

Rectas oblicuas

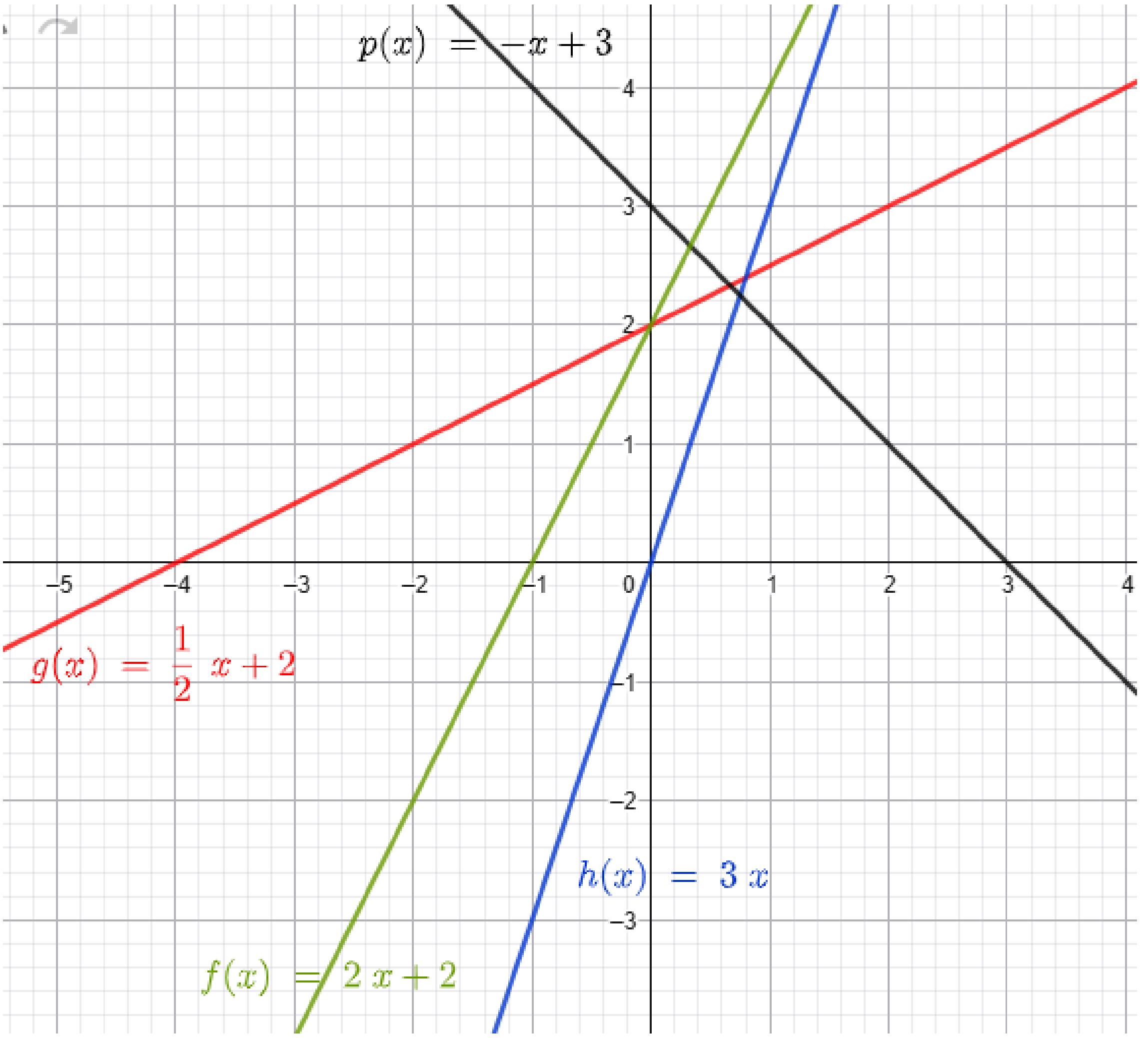
Si las pendientes de las rectas se cortan en un ángulo distinto de 90° entonces decimos que son ***oblicuas***. Las pendientes de las rectas son distintas, pero no llegan a ser opuestas e inversas (ya que si lo fueran serían rectas perpendiculares, como vimos más arriba).

Por ejemplo, algunas rectas oblicuas respecto a $y = 2x + 2$ podrían ser:

- $y = \frac{1}{2}x + 2$
- $y = 3x$
- $y = -x - 3$



Analizando gráficamente las rectas. ¿Te animas a indicar que ecuación se corresponde con cada una? Las respuestas están en la siguiente página para que puedas validar.


$p(x) = -x + 3$
$g(x) = \frac{1}{2}x + 2$
$h(x) = 3x$
$f(x) = 2x + 2$
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
-3
-2
-1
1
2
3
4

Sistemas de Ecuaciones Lineales

¿Alguna vez viste esas imágenes en redes sociales donde aparecen frutas y te piden que descubras cuánto vale cada una? Por ejemplo:

🍎 + 🍎 = 10

🍎 + 🍌 = 14

¿Cuánto vale la 🍌?

Este tipo de acertijos es, en realidad, un **sistema de ecuaciones lineales** disfrazado de juego.

Estamos tratando de descubrir el valor de cada fruta usando las pistas que nos dan. Cada fruta representa una incógnita (como x o y) y cada línea es una ecuación.

Si decimos que:

🍎 = x

🍌 = y

Entonces el sistema sería:

$$\begin{cases} x + x = 10 \\ x + y = 14 \end{cases}$$

¿Por qué es útil esto?

Aunque parezca un juego, este tipo de razonamiento se usa en ingeniería, economía, programación y muchas otras áreas. Resolver sistemas de ecuaciones nos permite modelar y resolver problemas reales, como calcular costos, analizar circuitos eléctricos o planificar recursos.

Entonces...

¿Qué es un Sistema de Ecuaciones Lineales?

Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto de dos o más ecuaciones que involucran las mismas variables (generalmente x e y) y que son de primer grado, es decir, no tienen potencias, raíces ni productos entre variables. Por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

¿Qué implica "Resolver un Sistema"?

Resolver un sistema de ecuaciones lineales implica encontrar los valores de las incógnitas que hacen que **todas las ecuaciones del sistema se cumplan simultáneamente**.

En el ejemplo anterior, si encontramos que $x = 2$ e $y = 1$, podemos verificar:

- En la primera ecuación: $2(2) + 1 = 5$
- En la segunda ecuación: $2 - 1 = 1$

Entonces, la **solución del sistema** es el par ordenado (2,1).

Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Existen varios métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Cada uno tiene sus ventajas y puede ser más útil según el tipo de sistema. A continuación, se presentan los cuatro métodos más comunes.

Método de sustitución

Este método consiste en **despejar una incógnita en una ecuación** y luego **sustituirla en la otra**. Por ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

- **Paso 1:** Despejamos x en la segunda ecuación

$$x - y + y = 1 + y$$

$$x = y + 1$$

- **Paso 2:** Sustituimos en la primera ecuación:

$$x + y = 5$$

$$(y + 1) + y = 5$$

$$y + y + 1 - 1 = 5 - 1$$

$$\frac{2y}{2} = \frac{4}{2}$$

$$y = 2$$

- **Paso 3:** Reemplazamos $y = 2$ en algunas de las ecuaciones originales:

$$x - y = 1$$

$$x - 2 = 1$$

$$x - 2 + 2 = 1 + 2$$

$$x = 3$$

Solución $(x; y) = (3; 2)$.

Método de igualación

Este método se usa cuando **ambas ecuaciones están despejadas respecto a la misma incógnita**. Se igualan las expresiones y se resuelve.

Si no estuvieran despejadas respecto a la misma incógnita, podemos primero despejarlas y luego igualar las expresiones.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x = 2y + 1 \\ x = y - 3 \end{cases}$$

Sabiendo que, para resolver un sistema, las variables deben tener el mismo valor en ambas ecuaciones, podemos decir que $x = x$. Entonces:

- **Paso 1:** igualamos las expresiones de x.

$$2y + 1 = y - 3$$

- **Paso 2:** despejamos la expresión para hallar el valor de y.

$$2y - y = -3 - 1$$

$$y = -4$$

- **Paso 3:** reemplazamos el valor obtenido en alguna de las ecuaciones originales para hallar x.

$$x = -4 - 3$$

$$x = -7$$

Solución: $(x; y) = (-7; -4)$

Método de reducción

Este método, también conocido como **método de resolución por sumas y restas**, consiste en sumar o restar las ecuaciones para lograr anular una de las variables.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

- **Paso 1:** sumamos ambas ecuaciones.

$$(2x + y) + (x - y) = 7 + 1$$

$$3x + 0y = 8$$

$$x = \frac{8}{3}$$

- **Paso 2:** sustituimos la variable obtenida en una de las ecuaciones originales.

$$x - y = 1$$

$$\frac{8}{3} - y = 1$$

$$y = \frac{8}{3} - 1$$

$$y = \frac{8}{3} - \frac{3}{3}$$

$$y = \frac{5}{3}$$

Solución $(x, y) = \left(\frac{8}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

Clasificación de los Sistemas de Ecuaciones Lineales

Cuando trabajamos con sistemas de ecuaciones lineales, no todos se comportan igual. Algunos tienen una única solución, otros no tienen ninguna, y otros tienen infinitas. Por eso, es importante saber **cómo se clasifican**.

Según la cantidad de soluciones, los sistemas se pueden clasificar en tres grandes grupos:

Sistema compatible determinado

- Tiene una **única solución**.
- Si graficamos las ecuaciones, las rectas se **cortan en un solo punto**.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Solución: $x = 3, y = 1$

Sistema compatible indeterminado

- Tiene **infinitas soluciones**.
- Al graficar, veremos las ecuaciones **representan la misma recta**.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

Cualquier punto sobre la recta es solución del sistema.

Sistema incompatible

- **No tiene solución.**
- Si graficamos, notaremos rectas **paralelas (nunca se cruzan)**.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

No hay ningún punto que cumpla ambas ecuaciones al mismo tiempo.

¿Cómo saber a qué tipo pertenece un sistema?

Depende de lo que se obtenga al resolver el sistema:

- Si encontramos un único valor para cada incógnita, estamos hablando de un **Sistema Compatible Determinado (SCD)**.
- Si encontramos una igualdad verdadera tal como $0 = 0$, entonces hablamos de un **Sistema Compatible Indeterminado (SCI)**.
- Si llegamos a una contradicción, por ejemplo $0 = 5$, nos encontramos ante un **Sistema Incompatible**.

Función Cuadrática

Aunque al principio pueda parecer una fórmula más, la función cuadrática está **en todas partes**. Desde el deporte hasta la economía, pasando por la física y la arquitectura, su forma de parábola aparece cada vez que algo **sube y luego baja**, o cuando se busca **maximizar o minimizar** algo.

En arquitectura e ingeniería, muchas estructuras como puentes, arcos o parabólicas de antenas tienen forma de parábola. Esto no es casualidad: la parábola tiene propiedades que la hacen **resistente y eficiente**.

Forma general

Una función cuadrática tiene la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde:

- x es la variable.
- $f(x)$ es el resultado.
- Y los coeficientes a, b, c determinan la forma de la parábola.

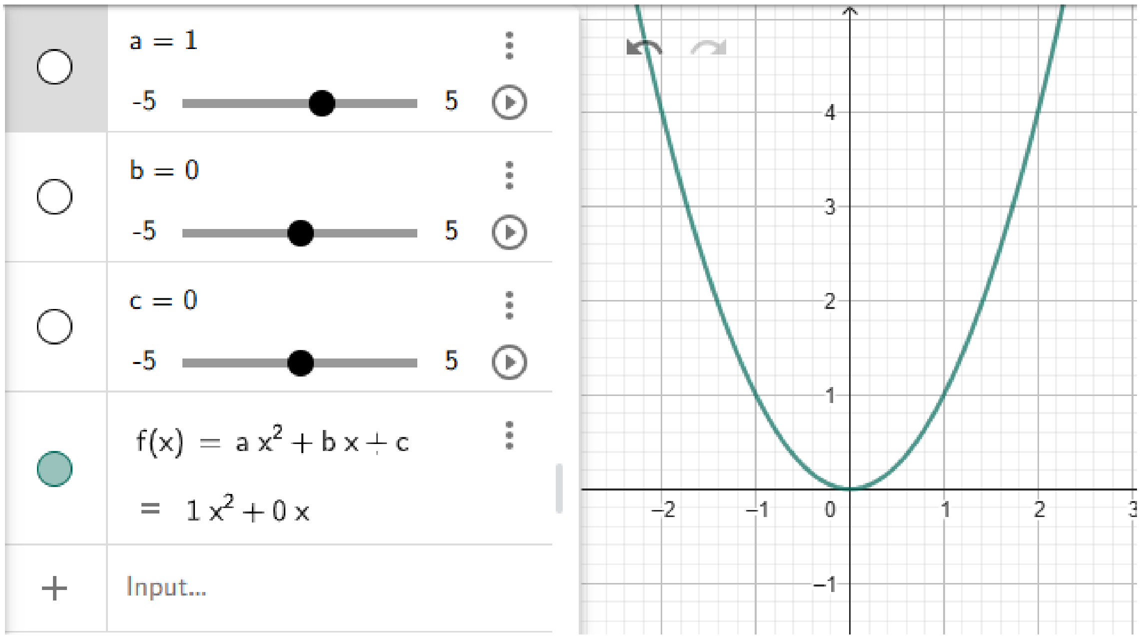
Significado de los coeficientes a, b y c

Coeficiente a

- Determina la concavidad (hacia donde van las ramas de la parábola)
  - Si $a > 0$ entonces es cóncava hacia arriba.
  - Si $a < 0$ entonces es cóncava hacia abajo.
  - Si $a = 0$, el término cuadrático se anula y ya no tendríamos una función cuadrática, tendríamos una lineal. a siempre debe ser distinto de 0 en estas funciones.
- Indica que tan abiertas estarán las ramas de la parábola.
  - Mientras más grande sea $|a|$, más estrecha será la parábola.
  - Mientras más chico sea $|a|$, más ancha se volverá la parábola.

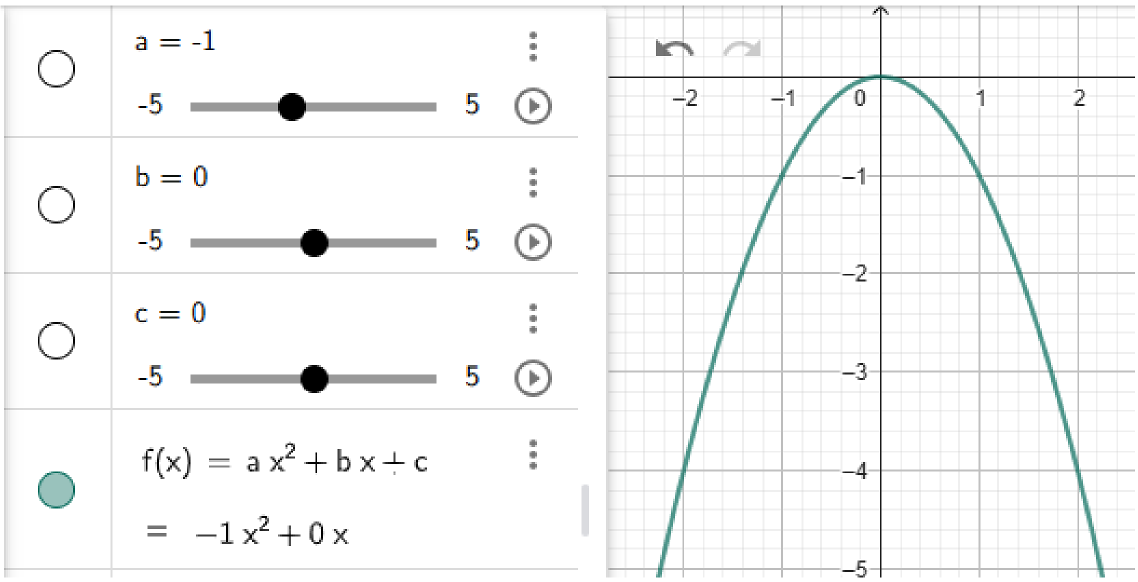
Ejemplos gráficos del coeficiente a

Cuando a es positivo, las ramas se orientan hacia arriba.



Nota: el gráfico indica al lado izquierdo los valores de los coeficientes y la función resultante. Para este caso, $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$. Si reemplazamos en la forma general, la función nos queda $f(x) = 1. x^2 + 0. x + 0$, o lo que es lo mismo $f(x) = x^2$. En el lado derecho se ve graficada esta función.

Si a toma valores negativos, la parábola será cóncava hacia abajo, probemos con $a = -1$.



Es importante observar que, si a es positivo, el vértice de la función será un ***mínimo***, y si a fuese negativo, el vértice será un ***máximo***. En muchas ocasiones se requiere realizar este análisis.

Coeficiente b

Influye en la posición horizontal del vértice. Podemos utilizar este coeficiente en conjunto con a para obtener la coordenada x del vértice de la función:

$$v_x = -\frac{b}{2a}$$

Para obtener la coordenada en y simplemente analizamos la función en el punto v_x. Hagamos un ejemplo para que sea más claro:

Hallar el vértice de la función $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$

$$v_x = -\frac{b}{2a} \rightarrow v_x = -\frac{(-4)}{2.2} \rightarrow v_x = 1$$

Ahora que tenemos la coordenada x del vértice, evaluamos la función en $x = 1$. Si recordas de cuando trabajamos polinomios, evaluarlo en un punto implica reemplazar todas las veces que aparece esa variable por el valor a evaluar. En este caso:

$$f(1) = 2.(1)^2 - 4.(1) + 2$$

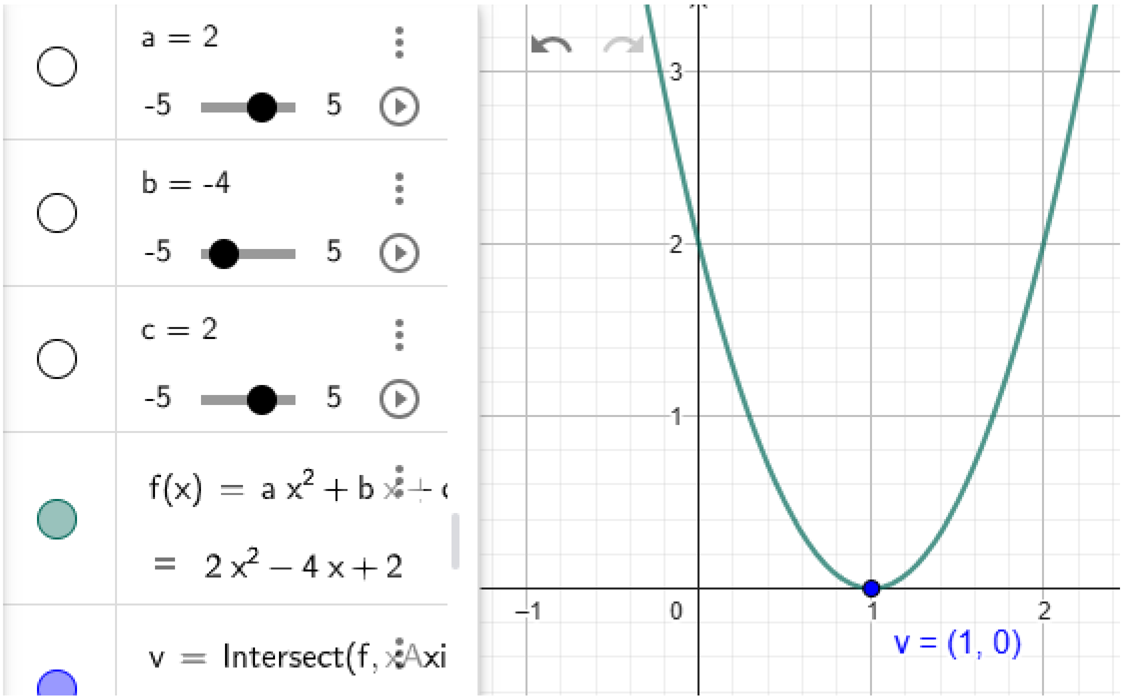
Nota: Los paréntesis se colocaron para aportar claridad y visibilidad al reemplazo realizado, no es necesario colocarlos si el valor es positivo.

$$f(1) = 2.1 - 4 + 2$$

$$f(1) = 2 - 4 + 2$$

$$f(1) = 0$$

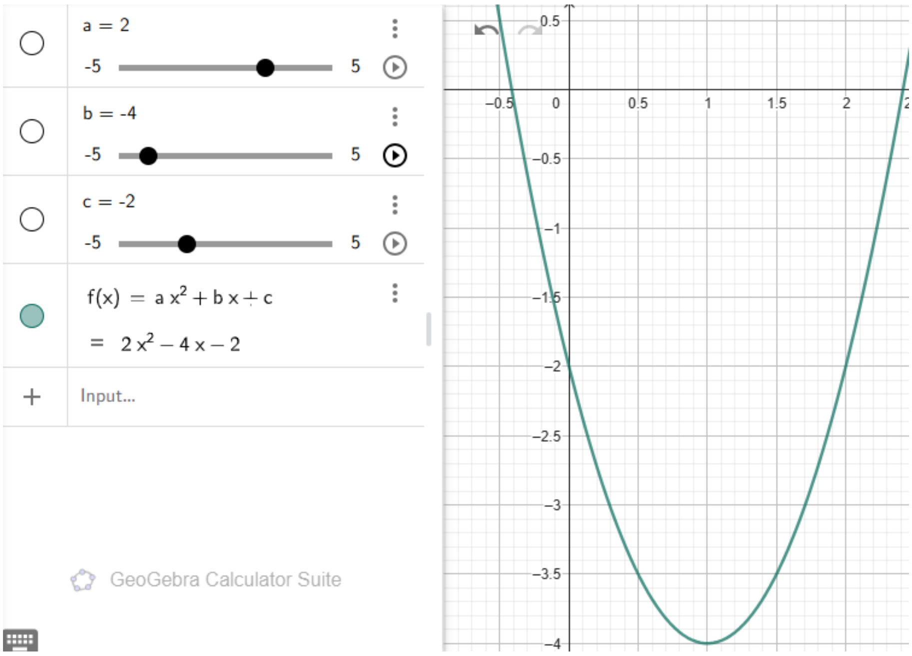
Entonces, el vértice de la función será el punto $v(1; 0)$. Si graficamos:

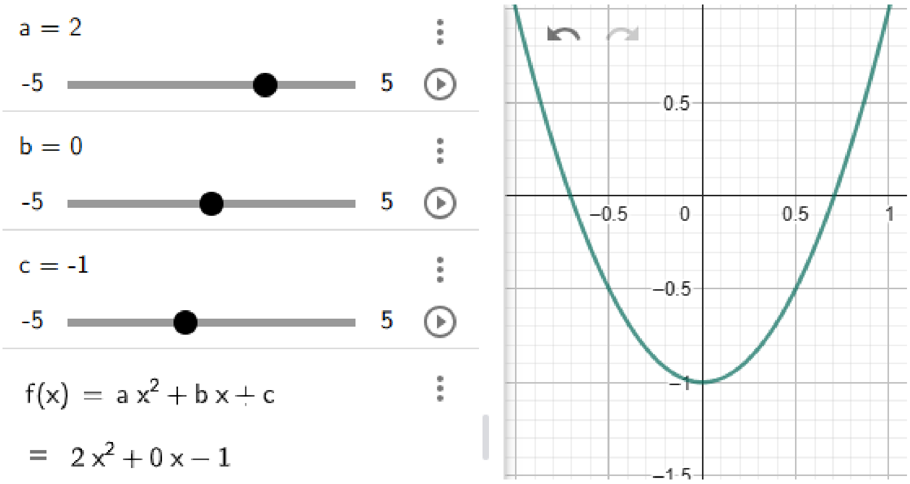


Coeficiente c

Así como la función lineal tiene la ordenada al origen, en este caso, quien nos indica el punto de corte con el eje y será el coeficiente c. Si vemos el ejemplo de arriba, $c = 2$ y la rama izquierda de la parábola corta al eje y cuando toma valor 2.

Ejemplos gráficos del coeficiente c





Raíces

Las **raíces o ceros** de una función cuadrática son los valores de x para los cuales la función se anula, es decir, donde $f(x) = 0$. Representan los puntos de corte con el eje x (horizontal o de las abscisas). Se obtienen **resolviendo la ecuación cuadrática**

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Como la expresión es de grado dos (*recordando: el grado de un polinomio queda dado por su mayor exponente*), tiene dos soluciones. El grado de una expresión siempre nos indica la cantidad de raíces que tendrá. En el caso de las cuadráticas, puede tener

- 2 raíces.
- Solo una si es el vértice el que corta el eje x.
- O ninguna si la parábola está por encima del eje x y es cóncava hacia arriba.

Ahora bien ¿Cómo resolvemos la función cuadrática? Para esto, ya existe una fórmula conocida como **fórmula resolvente** o **Bhaskara**

Forma canónica o estándar

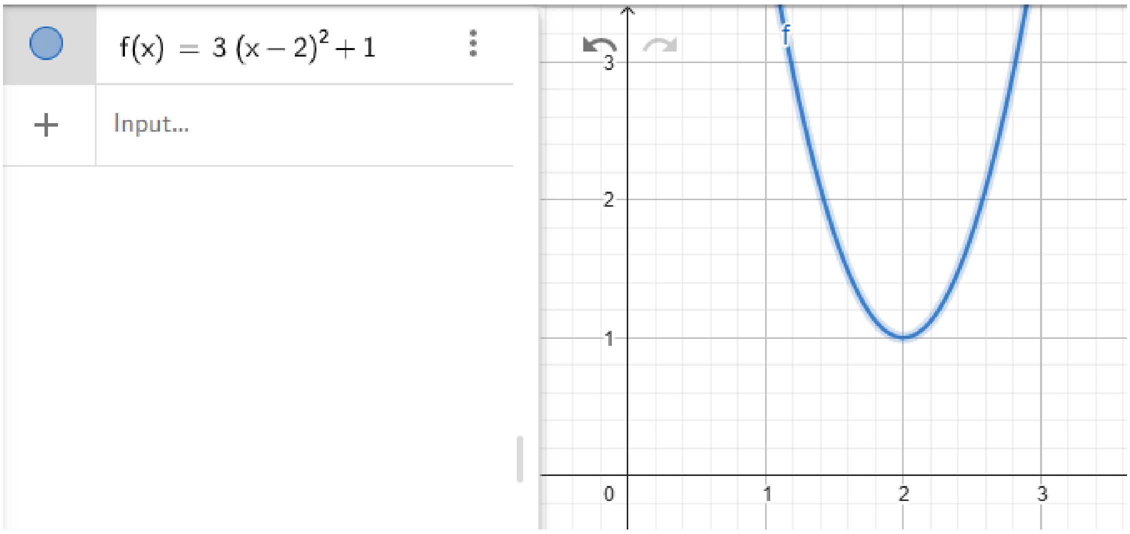
Hay una forma más de expresar las funciones cuadráticas y es conocida como ***forma canónica***.

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

Es muy útil a la hora de graficar ya que indica el vértice de forma explícita. Los valores h y k son las coordenadas del punto mencionado, donde h representa la coordenada x y k representa la coordenada y.

$$v(h; k)$$

Por ejemplo, si la función fuera $f(x) = 3(x-2)^2 + 1$. El vértice sería el punto $V(2;1)$ y dado que a es positivo, sería cóncava hacia arriba.



Forma general a canónica

Es posible que en ocasiones necesitemos hallar la forma canónica de la función. Para esto, existen varias formas de proceder, en este manual desarrollaremos 2.

Opción 1: Hallar el vértice.

Si tenemos la ecuación de la forma:

$$f(x) = 2x^2 - 2x + 1$$

Y queremos llevarla a la forma canónica, podemos utilizar la fórmula del vértice para calcular la coordenada x.

$$v_x = -\frac{b}{2a}$$

Siendo $a = 2$ y $b = -2$, reemplazamos:

$$v_x = -\frac{(-2)}{2.2}$$

$$v_x = \frac{2}{4}$$

$$v_x = \frac{1}{2}$$

Ahora reemplazamos el x obtenido en la función original:

$$v_y = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2.\left(\frac{1}{2}\right) + 1$$

$$v_y = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2.\frac{1}{4} - 1 + 1$$

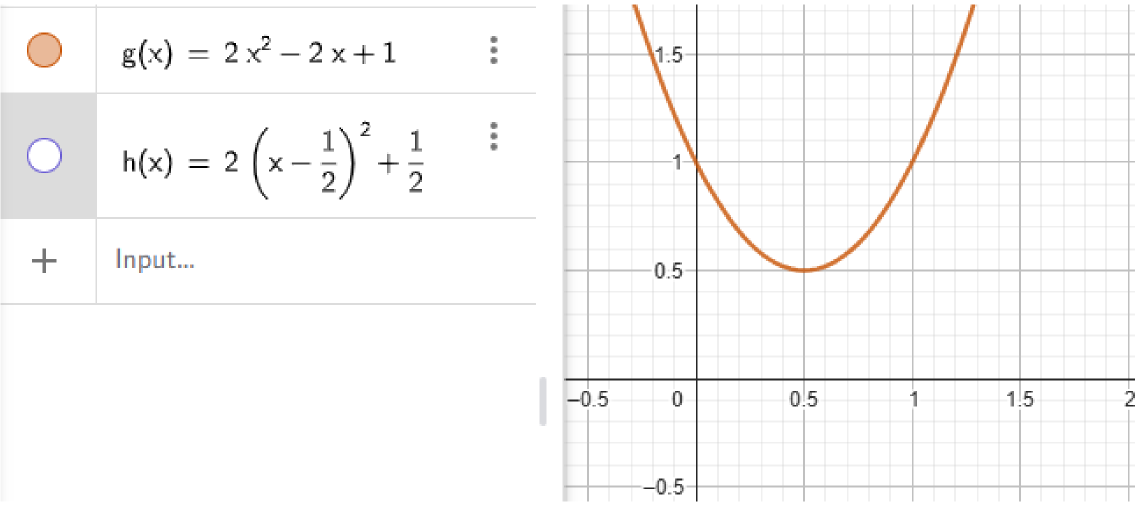
$$v_y = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

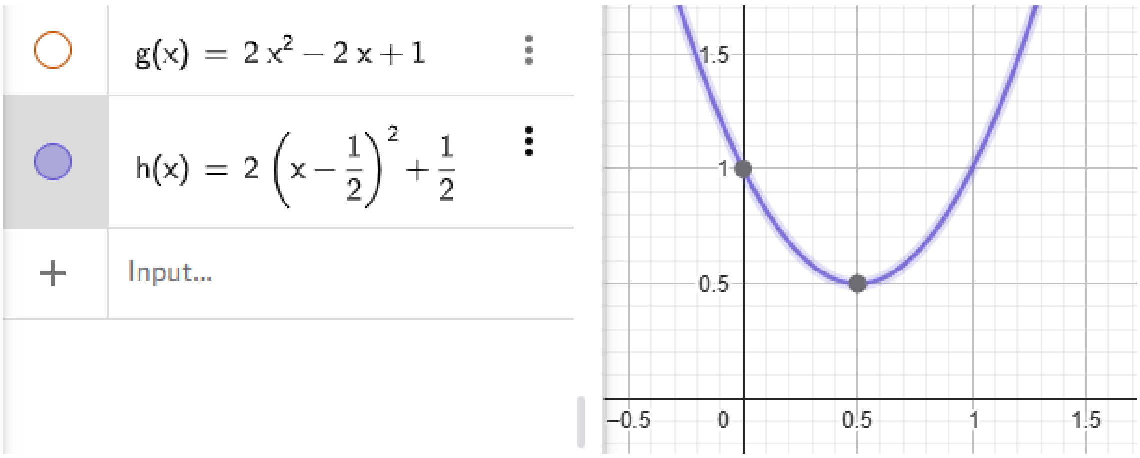
Finalmente, una vez que hallamos el vértice lo reemplazamos en la forma canónica:

$$f(x) = a.(x - h)^2 + k$$

$$f(x) = 2.\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

Para verificar, si graficamos deberíamos encontrarnos con la misma parábola:





Como podemos observar, ambos gráficos son iguales, la primera parábola es la forma general y la segunda la canónica.

Opción 2: Completar cuadrados

Otra opción, un poco más compleja, pero en ocasiones necesaria, es hallar la forma canónica a través del método de completar cuadrados. A modo ilustrativo, resolveremos la misma ecuación del ejercicio de arriba y deberíamos llegar al mismo resultado. Sea:

$$f(x) = 2x^2 - 2x + 1$$

- **Paso 1:** sacar factor común del coeficiente a:

$$f(x) = 2(x^2 - x) + 1$$

- **Paso 2:** completar cuadrados dentro del paréntesis. Para esto, hay que llevar la expresión $x^2 - x$ a la forma $a^2 \pm 2ab + b^2$

  Podemos decir que $a = x$ ya que son los términos que están elevados al cuadrado. (También podríamos decir que $x = b$, ambos resultan en lo mismo).

  Luego, podríamos decir que

$$-x = 2ab$$

  Ya que $-x$ es el único término que no está elevado al cuadrado. Siendo que $a = x$, el lado derecho del igual nos queda $2xb$. Ahora despejamos:

$$-x = 2xb$$
$$-\frac{x}{x} = \frac{2xb}{x}$$
$$-1 = 2b$$
$$-\frac{1}{2} = b$$

  Finalmente reemplazamos en la fórmula del trinomio cuadrado perfecto:

$$x^2 - x + \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

  Pero al agregar b, estamos cambiando la expresión original, por lo que debemos restarlo.

$$x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

  De esta forma, si operamos la expresión, volverá a anularse el término agregado. $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0\right)$. Entonces:

$$(x^2 - x) = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

- **Paso 3:** Podemos expresar el trinomio cuadrado perfecto como:

$$(a \pm b)^2$$

  En este caso particular:

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

  Reemplazamos el paréntesis original por la expresión ya completada.

$$f(x) = 2.\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] + 1$$

- **Paso 4:** desarrollar la expresión para llevarla a la forma canónica:

$$f(x) = 2.\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 2.\frac{1}{4} + 1$$
$$f(x) = 2.\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1$$
$$f(x) = 2.\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

Efectivamente, llegamos a la misma expresión.

Resolviendo la función (hallar las raíces)

La **fórmula resolvente** permite encontrar las soluciones (raíces) de cualquier ecuación cuadrática de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Las soluciones se obtienen con la siguiente fórmula:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Reemplazando los coeficientes de la expresión cuadrática en la fórmula resolvente se obtendrán dos raíces. **Aclaración:** es sumamente importante recordar que la expresión **debe estar igualada a cero, de no ser así, debemos despejarla para que quede igualada a cero antes de aplicar la fórmula.**

Veamos un ejemplo para que quede más claro.

Hallar las raíces de la función $2x^2 + 7x - 9 = \ -6$

Al no estar igualada a cero, debemos primero despejar para que lo esté:

$$2x^2 + 7x - 9 + 6 = 0$$

$$2x^2 + 7x - 3 = 0$$

Ahora sí, como siguiente paso identificamos los coeficientes a, b y c:

$$ax^2 + bx + c$$

- a siempre es el coeficiente que **acompaña al término cuadrático**.
- b es el que **acompaña al término lineal** (se conoce así al término cuya variable está elevada a la primera potencia x^1. Recordá que por convención, cuando la potencia es 1 no se escribe).
- c es el **término independiente**, el término **constante**.

Entonces, en este caso:

$$a = 2$$

$$b = 7$$

$$c = -3$$

Dos cuestiones a prestar atención:

1. Tomamos **sólo el coeficiente**, la variable que acompaña la ignoramos.
2. Mantenemos el signo del coeficiente. Si en la expresión es negativo, también deberá serlo a la hora de reemplazar en la fórmula resolvente.

Procedemos a reemplazar los coeficientes:

$$\frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4.2.(-3)}}{2.2}$$

$$\frac{-7 \pm \sqrt{49 + 24}}{4}$$

$$\frac{-7 \pm \sqrt{73}}{4}$$

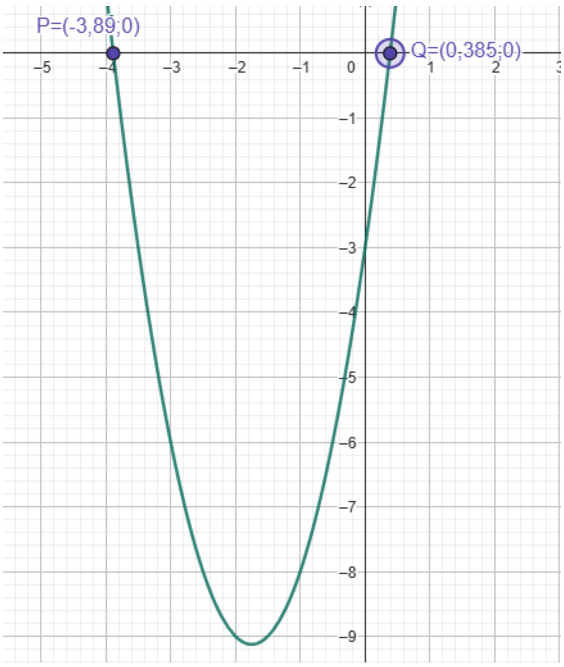
$$\frac{-7 \pm 8{,}54}{4}$$

Una vez que resolvemos la raíz, debemos separar el procedimiento en dos resultados, uno para sumar y otro para restar.

$$x_1 = \frac{-7 + 8{,}54}{4} = 0{,}385$$

$$x_2 = \frac{-7 - 8{,}54}{4} = -3{,}89$$

Hallamos así, las dos raíces de la función cuadrática original. Para validar, grafiquemos la parábola con alguna herramienta que nos ayude a visualizarlo:



Seminario Universitario de Ingreso 2026

MÓDULO III

Espacio curricular:
Resolución de problemas

UTN - FRLP

PAICAT "Programa de Acompañamiento a Ingresantes de Carreras Tecnológicas".

Contenido

Resolución de Problemas

Los problemas se definen como cuestiones que se plantean para encontrar un dato desconocido a partir de otros datos conocidos, o para determinar el método necesario para obtener un resultado específico. Aunque todos los problemas pueden ser distintos, es habitual seguir una serie de pasos para organizarse en el proceso de búsqueda de la solución; esto se conoce como metodología.

No existe una fórmula fija para resolver problemas. Sin embargo, el objetivo principal de cualquier método es mantenerse organizado y aplicar un enfoque ordenado.

Pasos para la resolución de problemas

1. Entender el Problema: esta fase se trata de asegurar la comprensión del enunciado. Algunas preguntas clave son:

- ¿Entendés todo lo que dice el problema?
- ¿Podés expresarlo con tus palabras?
- ¿Cuáles son los datos conocidos y qué se busca?
- ¿Hay información suficiente o información extraña?

Considerar si es similar a otros problemas ya resueltos puede ser útil. Si el problema está por escrito, se recomienda leerlo varias veces, enlistar los datos y reconocer las palabras clave que indican que buscar. Si es posible, realizar un dibujo o diagrama ayuda a orientarse.

2. Configurar un Plan: necesitamos buscar estrategias adecuadas para encontrar la solución. El preparar un plan implica encontrar un camino que relacione todos los datos. Las estrategias pueden incluir:

◦ Ensayo y error.

◦ Buscar un patrón.

◦ Hacer un diagrama o figura.

◦ Usar casos.

◦ Resolver un problema equivalente.

◦ Hacer una lista.

◦ Resolver una ecuación.

◦ Usar un modelo.

3. Ejecutar el Plan: una vez definido el plan, se implementan las estrategias seleccionadas hasta lograr la solución o hasta que la acción sugiera un nuevo

camino. Es importante no tener miedo de volver a empezar, ya que un "comienzo fresco" a menudo conduce a una nueva estrategia exitosa. Si no se tiene éxito al principio, nunca está de más pedir un consejo a alguien o dejar pasar un poco de tiempo. Muchas veces las mejores soluciones llegan cuando no las estamos buscando.

4. Mirar Hacia Atrás (Retroalimentación): la retroalimentación o feedback implica la comprobación del resultado. Se debe verificar si la solución es correcta y si satisface lo establecido en el problema. Además, se debe reflexionar si existe una solución más sencilla o si la solución encontrada se puede extender a un caso general. Este proceso de revisión es crucial, ya que la comprensión del problema a menudo aumenta a medida que se avanza en su resolución. Es importante establecer con precisión cuál fue el paso clave en la solución.

Resolución de problemas matemáticos

Cuando hablamos de resolver un problema matemático, los cuatro pasos mencionados se vuelven un más específicos. Aunque todos los problemas son diferentes, se acostumbra a seguir una metodología para organizarse en el proceso de búsqueda de la solución:

1. Comprender el enunciado (Entender el problema).

2. Formularlo en una expresión matemática (Configurar un plan).

3. Resolver la expresión matemática (Ejecutar el plan).

4. Comprobar el resultado (Mirar hacia atrás).

Pasos adaptados a la matemática

Paso 1: Comprender el Enunciado e Identificar Variables

Para resolver un problema matemático de manera efectiva, es fundamental comprender completamente la situación planteada. Esto implica una lectura atenta y reiterada del enunciado, prestando especial atención a los datos disponibles y a las palabras clave que indican lo que se debe encontrar.

Una buena práctica consiste en identificar y listar la información conocida, incluyendo las magnitudes y unidades involucradas. Al mismo tiempo, es necesario reconocer la incógnita, es decir, aquello que se nos pide determinar. Expresiones como “hallar”, “cuánto”, “qué”, “cuándo”, “a qué distancia” o “a qué altura” suelen señalar claramente el objetivo del problema.

Finalmente, el realizar un esquema o diagrama puede ser de gran ayuda para que podamos visualizar la situación y organizar la información. Esta representación gráfica facilita la interpretación del problema y orienta la búsqueda de una solución.

Paso 2: Convertir y Formular el Modelo Matemático

Una vez comprendido el enunciado y organizada la información, el siguiente paso consiste en traducir la situación planteada a una expresión algebraica. Esto implica tomar los datos disponibles (incluyendo los que puedan surgir de un dibujo o esquema) y representarlos mediante símbolos, operaciones y relaciones matemáticas.

Construir un buen modelo es clave para avanzar hacia la resolución del problema, ya que permite aplicar técnicas algebraicas para encontrar la solución buscada.

Paso 3: Resolver la Expresión Matemática

Una vez que el problema ha sido expresado en lenguaje matemático, se procede a la ejecución del plan.

Búsqueda de la Incógnita: El objetivo es RESOLVER la expresión buscando el valor de lo que desconocemos (incógnita/s).

Paso 4: Comprobar el Resultado y Retroalimentación

Este paso, también llamado "mirar hacia atrás", es crucial para asegurar que el resultado es válido y consistente con las condiciones iniciales.

- Verificación: Se debe COMPROBAR el resultado. Esto se hace verificando que el modelo se ajusta al problema y que la respuesta satisface lo establecido.
- Sustitución: Típicamente, la comprobación implica reemplazar el valor hallado en la expresión matemática original para confirmar la igualdad. Por ejemplo, al verificar un promedio, se sustituye la nota hallada para confirmar que el promedio total cumple la condición.
- Análisis: Al mirar hacia atrás, uno puede advertir si existe una solución más sencilla o si la solución se puede extender a un caso general.

Resolviendo problemas

Conjuntos

En una universidad, se realizó una encuesta entre 120 estudiantes sobre sus preferencias de materias. Los resultados fueron los siguientes:

65 estudiantes cursan Matemática (conjunto M).

50 estudiantes cursan Física (conjunto F).

30 estudiantes cursan ambas materias.

a) ¿Cuántos estudiantes cursan solo Matemática?
b) ¿Cuántos estudiantes cursan solo Física?
c) ¿Cuántos estudiantes cursan al menos una de las dos materias?
d) ¿Cuántos estudiantes no cursan ninguna de las dos materias?

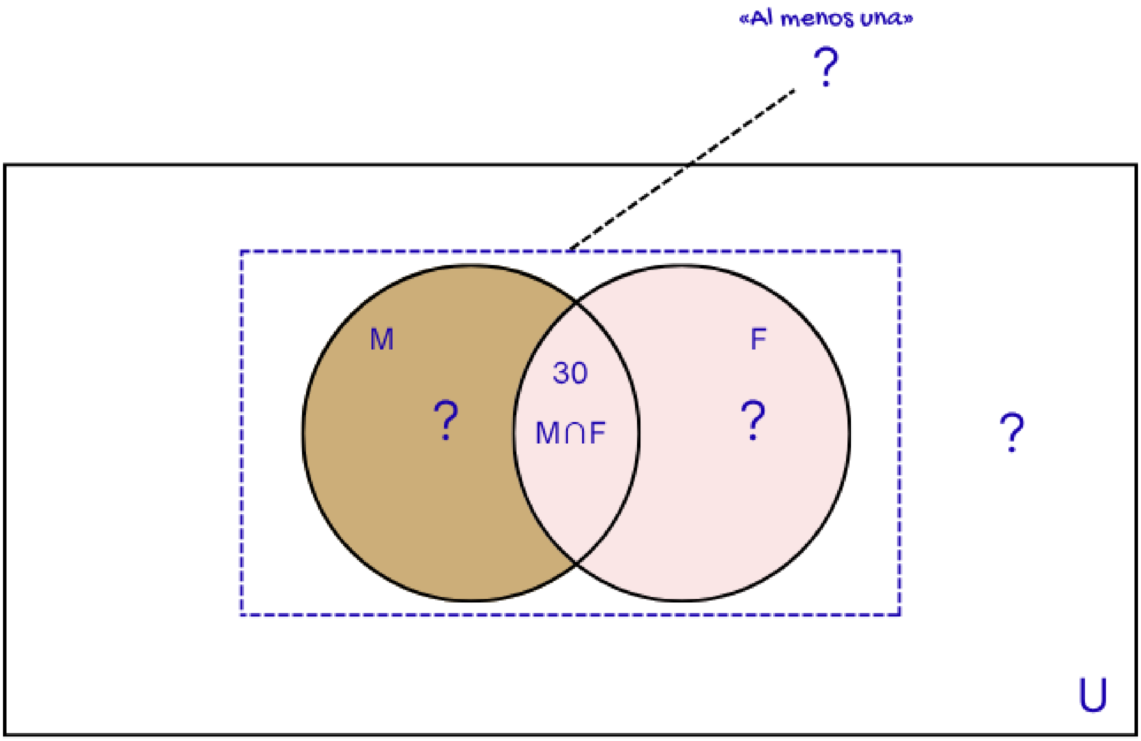
Paso 1: Comprender el enunciado

Según la metodología vista, lo primero que deberíamos hacer es comprender el enunciado. Empecemos anotando qué conocemos y cuáles son las incógnitas:

- Total de estudiantes: 120
- 65 estudian matemática
- 50 estudian física
- 30 estudian ambas

- Solo matemática: ?
- Solo física: ?
- Al menos una: ?
- Ninguna: ?

De ser posible, armamos un gráfico que nos muestre que debemos buscar:



Paso 2: Configurar un plan

Como segundo paso, debemos formular el modelo con el que lo resolveremos. Es decir, debemos expresarlo matemáticamente:

a. Conocemos el total de los que estudian matemática (65 estudiantes), pero este número incluye a quienes estudian física también, por lo cual debemos descontar ese número.

Entonces, lo que debemos encontrar es el número de estudiantes de matemática (M), menos los que también estudian física (M ∩ F):

$$M = M_{total} - |M \cap F|$$

b. Realizamos un análisis similar al del inciso a ya que en este caso nos pide el número de estudiantes que cursan solo física. Nos quedaría los que estudian física (F) menos los que estudian también matemática (M ∩ F)

$$F = F_{total} - |M \cap F|$$

c. Ahora, para el caso en el que se nos pide calcular quienes estudian “al menos una”, lo que tenemos que obtener todos los que estudian solo matemática, todos los que estudian física y todos los que estudian ambas. A esta altura, estos tres números ya van a ser dato por lo que se podrá resolver sin problema.

$$C = F + M + |M \cap F|$$

O lo que es lo mismo, sumar el total de matemática y física y restar la intersección, ya que los conjuntos no admiten repetidos.

$$C = F_{total} + M_{total} - |M \cup F|$$

d. Finalmente, los que no estudian ninguna sería el total de estudiantes encuestados (T) menos los que estudian al menos una:

$$U = T - C$$

Paso 3: Ejecutar el plan

Una vez modelado el problema con las fórmulas matemáticas, podemos comenzar a resolverlo reemplazando con los datos que tenemos.

a. ¿Cuántos estudiantes cursan solo Matemática?

$$M = 65 - 30$$

$$M = 35$$

Hay 35 estudiantes que cursan solo matemática.

b. ¿Cuántos estudiantes cursan solo Física?

$$F = 50 - 30$$

$$F = 20$$

Hay 20 estudiantes que cursan solo física.

c. ¿Cuántos estudiantes cursan al menos una de las dos materias?

$$|C| = |M| + |F| + |M \cap F|$$

$$|C| = 35 + 20 + 30$$

$$|C| = 85$$

Hay 85 personas que estudian al menos una de las 2

d. ¿Cuántos estudiantes no cursan ninguna de las dos materias?

$$U = 120 - 85$$
$$U = 35$$

35 estudiantes no cursan ni física ni matemática.

Paso 4: Mirar hacia atrás

Debemos corroborar nuestro resultado. Una forma de hacerlo en este caso es sumar las cantidades obtenidas y verificar que realmente nos dé el total de estudiantes (120).

$$T = M + F + |M \cap F| + U = 35 + 20 + 30 + 35$$

$$T = 120$$

El resultado obtenido es consistente con los datos iniciales, por lo que podemos concluir que el problema ha sido resuelto correctamente.

Lineales

Una empresa de transporte cobra un costo fijo por el servicio más un costo variable por kilómetro recorrido. Se sabe que:

- El costo total por un viaje de 50 km es $1.250.
- El costo total por un viaje de 90 km es $1.850.

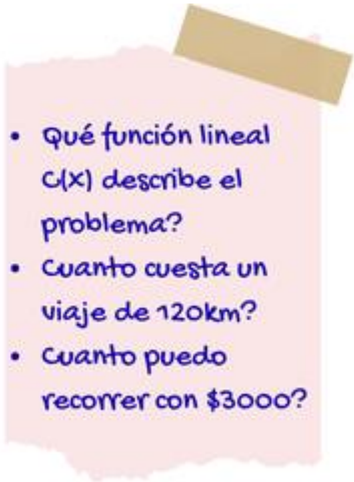
a) Determinar la función lineal que relaciona el costo total con la distancia recorrida en kilómetros.

b) Calcular el costo de un viaje de 120 km.

c) ¿Cuál es la distancia máxima que se puede recorrer con $3.000?

d) Interpretar el significado de la pendiente y la ordenada al origen en el contexto del problema.

Paso 1: Comprender el enunciado



Paso 2: Configurar un plan

Sabemos que el precio va a depender de la cantidad de kilómetros recorridos, por lo que podemos considerar la distancia como nuestra variable independiente y el costo nuestra variable dependiente.

$$x: Cantidad\ de\ kilómetros\ recorridos$$

$$y: Precio\ total\ del\ viaje$$

Lo que necesitamos hacer es hallar una función lineal $y = m \cdot x + b$ que describa nuestro problema. Como tenemos dos puntos $P_1: (50; 1250)$ y $P_2: (90; 1850)$. Podemos calcular la pendiente a partir de ellos utilizando la ecuación:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Y finalmente hallar la ecuación de la recta con la fórmula punto-pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Una vez que tengamos la expresión que describa nuestro problema, será cuestión de ir reemplazando los valores para hallar lo que se nos pide.

Paso 3: Ejecutar el plan

Primero, utilizo P_1 y P_2 para calcular la pendiente:

$$m = \frac{1850 - 1250}{90 - 50}$$

$$m = \frac{600}{40}$$

$$m = 15$$

Luego, elegimos cualquiera de los dos puntos y los reemplazamos junto con m en la ecuación punto-pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1250 = 15 \cdot (x - 50)$$

Operamos para despejar la y:

$$y - 1250 = 15x - 750$$

$$y = 15x - 750 + 1250$$

$$y = 15x + 500$$

Ya tenemos el punto a: la función lineal que describe el problema es $y = 15x + 500$), o lo que es lo mismo $C(x) = 15x + 500$

Ahora nos pide calcular el costo de un viaje de 120 km. Sabemos que en nuestro problema, la distancia recorrida es la variable independiente, es decir x. Entonces debemos analizar la función cuando $x = 120$

$$C(120) = 15 \cdot 120 + 500$$

$$C(120) = 1800 + 500$$

$$C(120) = 2300$$

Entonces, el costo de un viaje de 120 es de $2300.

El inciso c pregunta cuál es la distancia máxima que se puede recorrer con $3000. En este caso, el dato es la variable dependiente y, y la incógnita es x. Entonces reemplazando nos queda:

$$3000 = 15x + 500$$

Operamos algebraicamente:

$$3000 - 500 = 15x$$

$$\frac{2500}{15} = x$$

$$x \approx 166km$$

Finalmente, se nos pide analizar que representa la pendiente y que representa la ordenada al origen. Para este problema puntual, la pendiente nos indica que, por cada kilómetro adicional, el costo total aumentará $15. Por otro lado, la ordenada al origen nos indica que siempre habrá un gasto de $500 independientemente de la distancia recorrida.

Paso 4: Mirar hacia atrás

Podemos validar si la función hallada es correcta reemplazando los puntos originales en ella y verificando que la igualdad se cumpla:

$$C(50) = 15 \cdot 50 + 500 = 1250$$

$$C(50) = 750 + 500 = 1250$$

$$C(50) = 1250 = 1250$$

$$C(90) = 15 \cdot 90 + 500 = 1850$$

$$C(90) = 1350 + 500 = 1850$$

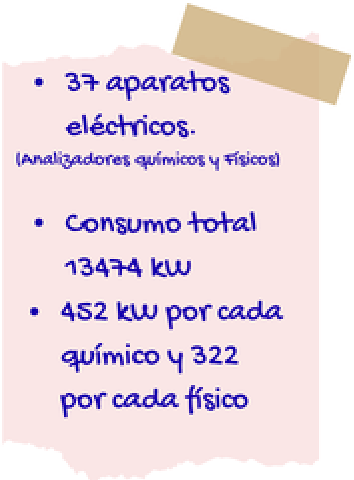
$$C(90) = 1850 = 1850$$

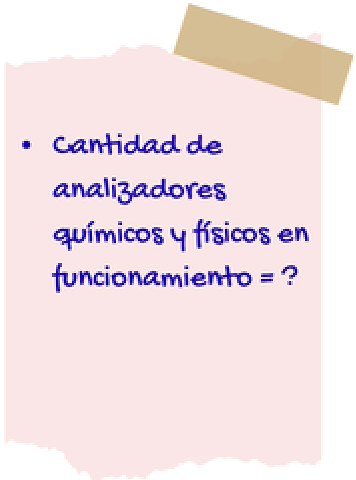
Ambas igualdades se cumplen, por lo que podemos afirmar que hallamos la ecuación correctamente.

Sistemas de Ecuaciones

Un equipo de ingenieros analiza el consumo eléctrico en el área de calidad de una empresa. El sector cuenta con 37 aparatos eléctricos, compuestos por analizadores químicos (Q) y analizadores físicos (F). Durante un día de operación, el consumo total registrado fue de 13.474 kW. Según las fichas técnicas, cada analizador químico consume 452 kW por unidad, mientras que cada analizador físico consume 322 kW por unidad. Determinar cuántos analizadores químicos y físicos estuvieron en funcionamiento en el área durante la medición de consumo.

Paso 1: Comprender el enunciado





Paso 2: Configurar un plan

En este caso, tenemos 2 incógnitas: por un lado, la cantidad de analizadores químicos y por otro los físicos. Sabemos que, entre los dos tipos, suman un total de 37 aparatos:

$$Q + F = 37$$

A su vez, conocemos que por cada analizador químico se consumen 452 kW y por cada uno de los físicos 322 kW. Sumados los consumos, se llegó a un total de 13474 kW. Expresado matemáticamente nos queda que:

$$452\ kW \cdot Q + 322\ kW \cdot F = 13474\ kW$$

Lo que nos deja un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} Q + F = 37 \\ 452Q + 322F = 13474 \end{cases}$$

Paso 3: Ejecutar el plan

Para poder hallar la solución, debemos aprovechar cualquiera de los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones y aplicarlo para hallar los valores de Q y F. En este caso, vamos a resolver por sustitución:

$$F = 37 - Q$$

Ahora reemplazamos F en la segunda ecuación:

$$452Q + 322(37 - Q) = 13474$$

$$452Q - 322Q = 13474 - 11914$$

$$130Q = 1560$$

$$Q = \frac{1560}{130}$$

$$Q = 12$$

Finalmente, reemplazamos el valor hallado para Q en cualquiera de las ecuaciones originales:

$$F = 37 - 12$$

$$F = 25$$

Entonces, podemos decir que en funcionamiento se tuvieron 12 analizadores químicos y 25 físicos.

Paso 4: Mirar hacia atrás

Si quisiéramos comprobar que los números obtenidos tengan sentido y coincidan con el problema planteado, simplemente reemplazamos en ambas ecuaciones para verificar que la igualdad se cumpla.

$$F + Q = 37$$

$$25 + 12 = 37$$

$$37 = 37$$

$$452 \cdot 12 + 322 \cdot 25 = 13474$$

$$5424 + 8050 = 13474$$

$$13474 = 13474$$

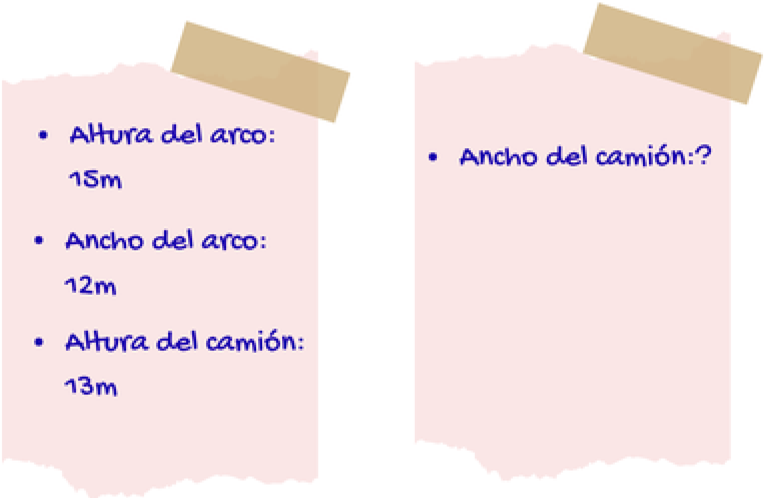
Efectivamente, el resultado es correcto.

Cuadráticos

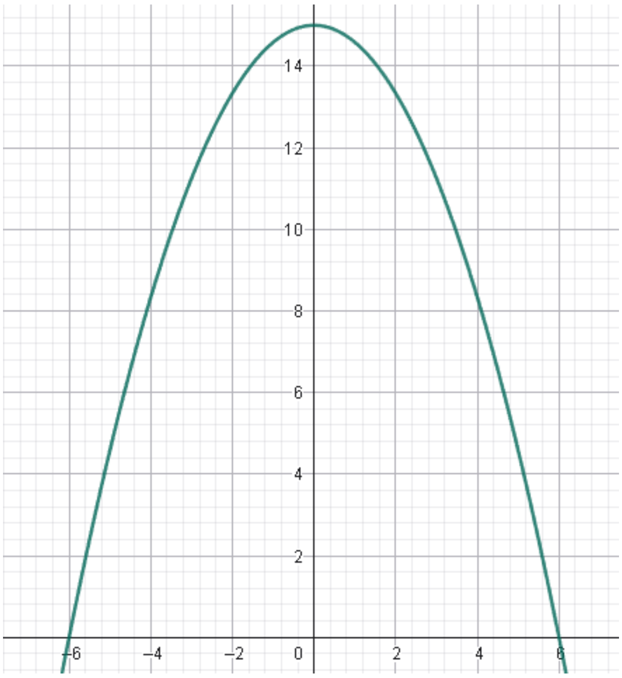
La entrada principal de un parque temático tiene un arco parabólico con una altura máxima de 15 metros y un ancho total en la base de 12 metros. Un camión con cabina de refrigeración tiene una altura de 13 metros y debe pasar por la entrada sin tocar la estructura. Determinar cuál es el ancho máximo que puede tener el camión para atravesar el arco sin colisionar.

Paso 1: Comprender el enunciado

Primero, anotamos los datos conocidos y los que deseamos encontrar:



Después, armamos un gráfico estimativo para ayudarnos a entender el problema:



Graficamos el medio de la parábola sobre el eje vertical ya que nos simplificará los cálculos más adelante. Encontramos así que el vértice está en el punto $v(0; 15)$ y que las raíces se encuentran en $r_1(-6; 0)$ y $r_2(6; 0)$.

Paso 2: Configurar el plan

Para poder hallar el ancho del camión, primero debemos obtener la ecuación que describa el problema. Sabiendo que la expresión canónica (o estándar) de las funciones cuadráticas es $y = a(x - h)^2 + k$, podemos reemplazar los datos que conocemos para hallar los desconocidos y así encontrar la función característica.

x e y pueden ser cualquiera de las dos raíces conocidas. Mientras que h y k son los valores del vértice: $v(h; k) = v(0; 15)$. Solo nos faltaría conocer a. Una vez calculado, simplemente nos quedaría evaluar el ancho del camión, es decir, el valor de x cuando y valga 13 (altura del camión). Al ser una función cuadrática, obtendremos 2 valores posibles para x.

Paso 3: Ejecutar el plan

$$0 = a(6-0)^2 + 15$$

$$6^2a + 15 = 0$$

$$36a = -15$$

$$a = -\frac{15}{36} = -\frac{5}{12}$$

La ecuación de la parábola es $y = -\frac{5}{12}x^2 + 15$.

Ahora, reemplazamos y por la altura del camión (13m):

$$13 = -\frac{5}{12}x^2 + 15$$

$$13 - 15 = -\frac{5}{12}x^2$$

$$-2 \cdot \left(-\frac{12}{5}\right) = x^2$$

$$\frac{24}{5} = x^2$$

$$\sqrt{\frac{24}{5}} = x$$

Sabemos que las raíces de índice par tienen dos valores posibles: uno positivo y uno negativo. Entonces:

$$x_1 = 2{,}19$$

$$x_2 = -2{,}19$$

El ancho máximo del camión será la distancia entre ambos puntos:

$$x_1 - x_2 = 2{,}19 - (-2{,}19) = 4{,}38\ metros$$

Paso 4: Mirar hacia atrás

En este caso, lo más prudente es preguntarnos ¿El resultado hallado tiene sentido? Y la realidad es que sí, para un arco de 12 metros de ancho, nos dio que un camión que pase por él debe ser de máximo 4,38 metros, lo cual tiene sentido físicamente hablando. Si nos hubiera dado un ancho negativo, o mayor a los 12 metros, deberíamos automáticamente cuestionarlo ya que no existen anchos menores a 0 y si el camión fuera más extenso que 12 m, tendría más extensión que la base del túnel que es la parte más ancha, por lo que sería ilógico afirmar que puede pasar por ahí.